<36635622060013
<36635622060013
Bayer. Staatsbibliothek

3651 Bibl. Mont 3

Lehrbuch
der
Arithmetik
zum
Gebrauche in den Schulen
und
zum Selbstunterrichte,
von

Johann von Gott Bundschue,
Professor der Mathematik und der Naturwissenschaften an dem königlich baierischen Gymnasium zu Kempten.

Dritter Theil,

welcher die Decimal- und Sexagesimal-Brüche, die Ausziehung der Quadrat- und Kubik-Wurzeln in Zahlen, wie auch die Elemente der Buchstabenrechnung, und mehrere Tabellen in Betreff verschiedener alten und neuen Maaße, Gewichte ꝛc. enthält.

Kempten, 1813.
gedruckt und im Verlag bey Dannheimer.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Bey den in diesem Theile vorkommenden mathematischen Zweigen führte ich ebenfalls, wie in den beiden vorausgehenden Theilen, um die Sache nicht bloß zu berühren, sondern vollständig, und nach ihrem ganzen Umfange abzuhandeln, für alle möglichen Fälle die gehörigen Regeln an, und ließ denselben jederzeit mehrere ausgearbeitete Beyspiele folgen.

Beym mathematischen Studium liegt am zweckmäßigen Elementarunterrichte, und an der richtigen Auffassung der ersten Grundsätze sehr vieles; um deswillen gieng ich beym Vortrage der Buchstabenrechnung mit besonderer Sorgfalt zu Werke, und richtete meine ganze Tendenz dahin, um die ersten Begriffe und Regeln für den jugendlichen Geist deutlich und einleuchtend darzustellen.

Die Sexagesimalbrüche sind im Grunde nichts anderes, als Potenzen, wo der Kürze wegen die Urgröße 60 gewöhnlich nicht geschrieben wird; ich habe deßwegen dieselben, um sie auf eine faßliche Weise vortragen zu können, im letzten Hauptstücke abgehandelt, nachdem vorhin in der Buchstabenrechnung die Lehre von den Potenzen vorausgegangen war.

Weil dieses Buch auch für die Schüler der Realklasse bestimmt ist, so kommen darin nebst denjenigen mathematischen Theilen, die nach dem allerhöchsten Normativ, und den allgemeinen Beschlüssen ddto München den 31. Jäner 1813 in dem Progymnasium zu lehren sind, mehrere andere Zweige, namentlich einige Aufgaben hinsichtlich der arithmetischen und geometrischen Progressionen, und die einfachen Gleichungen mit einer unbekannten Größe vor.

Durch diejenigen Tabellen, welche am Ende diesem Theile beygefügt worden sind, und die in verschiedenen

Ländern und Städten üblich gewesenen, oder gegenwärtig eingeführten Maaße und Gewichte enthalten, ist der Lehrer in den Stand versetzt, die Schüler sowohl in der Decimalrechnung, als auch in der Auflösung jener Aufgaben zu üben, die im bürgerlichen Leben beym Handel und Gewerbe unausgesetzt vorkommen.

Die schätzbaren Tabellen, das Maaß- Gewicht- und Münz-System der alten Römer, Griechen und Hebräer betreffend, welche Hr. Professor Weigl in seinem Lehrbuche der Arithmetik und Algebra anführt, habe ich so, wie ich sie da fand, abdrucken, und im Anhange dem gegenwärtigen Theile beyfügen lassen; dieselben werden sowohl bey der Erklärung der Klassiker dem Lehrer und Schüler, als auch allen denjenigen, die in Absicht auf diese Maaße, Gewichte und Münzen eine Auskunft verlangen, vortreffliche Dienste leisten.

Daß ich diese Schrift nicht aus Ehrgeitz oder Eigennutz verfaßte, ist vorzüglich aus dem Umstande ersichtlich, weil ich lange zauderte, und mich dazu, wie ich es schon in der Vorrede des ersten Theiles bemerkte, nur auf ausdrückliches und oft wiederholtes Verlangen, namentlich der dießortigen königlichen Herren Schul-Vorstände und jener meiner Herren Kollegen entschließen konnte, die dieselbe als Lehrbuch in ihren Klassen eingeführt haben.

Mein innerstes Bewußtseyn sagt mir, daß ich dabey keine andere Absicht habe, als meinem gegenwärtigen Berufe gemäß zum Besten des öffentlichen Unterrichtes dasjenige beyzutragen, was in meinen Kräften steht.

Möge die 10 Monate hindurch auf dieses Werk angewandte viele Mühe nicht mißkannt, und dasselbe immerhin auch wirklich nach seinem wahren Werthe beurtheilt und aufgenommen werden!

Kempten den 20. August 1813.

Professor Bundschue.

Inhalt.

I. Hauptstück.

Von den Decimalbrüchen, wie auch von der Ausziehung der Quadrat- und Kubik-Wurzeln in Zahlen.

I. Abschnitt.

Von den Decimalbrüchen.

I. Einleitung zu den vier Rechnungsarten mit den Decimalbrüchen . . . Seite 1. §. 1. bis §. 10.

II. Die vier Rechnungsarten der Decimalbrüche:

A) Die Addition . . . . . . S. 16. §. 11.

B) Die Subtraction . . . S. 17. §. 12. — §. 13.

C) Die Multiplication . . . S. 19. §. 14. — §. 16.

D) Die Division derselben . . S. 26. §. 17. — §. 22.

Wiederholung in Fragen, und Beyspiele zur Uebung S. 37. §. 23. — §. 24.

II. Abschnitt.

Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubik-Wurzeln in Zahlen.

I. Einige Erklärungen, sammt Verfertigung einer Tabelle . . . . . S. 41. §. 25. — §. 26.

II. Aufgaben in Absicht auf die Ausziehung der Quadrat-Wurzeln:

A) Jede gegebene Zahl zum Quadrate zu erheben S. 44. §. 27.

B) Aus einer ganzen Zahl, die nicht mehr als 2 Ziffern hat, die Quadratwurzel auszuziehen . S. 46. §. 28.

C) Aus einer ganzen Zahl die Quadratwurzel auszuziehen, es mag die gegebene Zahl aus wie immer vielen Ziffern bestehen . . . . . . S. 48. §. 29.

D) Aus einer ganzen Zahl, die kein vollkommenes Quadrat ist, diese Wurzel durch Annäherung zu bestimmen . . . . S. 53. §. 30.

E) Aus einem Decimalbruche diese Wurzel auszuziehen S. 58. §. 31.

F) Aus einem gemeinen Bruche diese Wurzel auszuziehen S. 60. §. 32.

Die Probe, diese Aufgaben betreffend . S. 64. §. 33.

III. Die nämlichen Aufgaben in Absicht auf die Ausziehung der Kubikwurzeln in Zahlen:

A) Jede Zahl zum Kubus zu erheben . . S. 67. §. 34.

B) Aus einer ganzen Zahl, die nicht mehr als 3 Ziffern hat, die Kubikwurzel auszuziehen . . S. 71. §. 35.

C) Aus einer jeden ganzen Zahl diese Wurzel auszuziehen . . . . S. 72. §. 36.

D) Diese Wurzel durch Annäherung zu bestimmen S. 79. §. 37.
E) Aus einem Decimalbruche diese Wurzel auszuziehen S. 82. §. 38.
F) Aus einem gemeinen Bruche dieselbe auszuziehen S. 85. §. 39.
Die Probe, diese Aufgaben betreffend . S. 88. §. 40.
Wiederholung uad Beyspiele S. 90. §. 41. — §. 42.

II. Hauptstück.

Von den ersten Elementen der Buchstabenrechnung, und den Progressionen, wie auch von der Auflösung der einfachen Gleichungen.

I. Abschnitt.

Von den vier Grundrechnungsarten mit Buchstaben.

I. Einleitung zu diesen Rechnungsarten S. 94. §. 43. — §. 44.
II. Die Addition und Subtraction S. 98. §. 45. — §. 50.
III. Die decadische Ergänzung . S. 117. §. 51. — §. 52.
IV. Von der Multiplication und Division S. 121. §. 53. — §. 59.

II. Abschnitt.

Von der Theilbarkeit ganzer Zahlen, wie auch von den geraden und ungeraden Zahlen.

Die Theilbarkeit ganzer Zahlen S. 140. §. 60. — §. 64.
Von den geraden und ungeraden Zahlen S. 148. §. 65.

III. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit Brüchen in der Buchstabenrechnung.

Einleitung hiezu . . . . . S. 151. §. 66.
Die vier Rechnungsarten mit solchen Brüchen S. 154. §. 67.
Aufgabe, zwey Zahlen zu finden, wenn die Summe und Differenz derselben bekannt ist . S. 161. §. 68.

IV. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit Potenzen.

I. Einleitung hiezu . . S. 163. §. 69. — §. 73.
II. Die vier Rechnungsarten mit Potenzen:
Erklärungen sammt der Additions-Regel S. 174. §. 74. — §. 75.
Regel der Subtraction . . . S. 176. §. 76.
Lehrsätze und Regeln, die Multiplication und Division mit Potenzen betreffend S. 176. §. 77. — §. 80.

V. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit Wurzelgrößen oder Irrationalzahlen.

Erklärungen sammt der Additions- und Subtractions-Regel . . . S. 190. §. 81. — §. 82.
Die Multiplication und Division S. 193. §. 83. — §. 85.

VI. Abschnitt.

Die Auflösung der Producte in ihre Factoren.

Erklärung sammt den Regeln hierüber S. 200. §. 86. — §. 87.

VII. Abschnitt.

Von den Progressionen.

Erklärungen . . . . . . S. 203. §. 88.
Aufgabe, einen Bruch durch fortgesetzte Division in eine Reihe aufzulösen . . . S. 205. §. 89.
Einige Aufgaben und Beyspiele in Absicht auf die arithmetischen und geometrischen Progressionen S. 210. §. 90. — §. 91.

VIII. Abschnitt.

Von der Auflösung einiger einfachen Gleichungen.

I. Als Einleitung, Erklärungen und Eintheilung der Gleichungen . . . S. 216. §. 92. — §. 94.
II. Die Auflösung einfacher Gleichungen mit einer unbekannten Größe . . . S. 218. §. 95. — 99.

III. Hauptstück.

Die Sexagesimalbrüche sammt einem Anhange, welcher das Maaß- Gewicht- und Münz-System der alten Römer, Griechen und Hebräer, wie auch die in verschiedenen Ländern und Städten üblichen Maaße u. Gewichte enthält.

I. Vorläufige Erklärungen und Aufgaben in Absicht auf die Sexagesimalbrüche. S. 229. §. 100. — §. 102.
II. Die vier Rechnungsarten mit den Sexagesimalen:
Regel der Addition und Subtraction nebst den Gründen des Verfahrens S. 237. §. 103. — §. 105.
Regel der Multiplication u. Division S. 239. §. 106. — §. 107.

Anhang,

welcher das Maaß-, Gewicht- und Münz-System der alten Römer, Griechen und Hebräer, wie auch die in verschiedenen Ländern und Städten üblichen Maaße und Gewichte enthält.

I. Abtheilung.

Das Maaß-, Gewicht- und Münz-System der alten Römer, Griechen und Hebräer.

A. Maaße der Römer:
a) Linien- und Längenmaaße . . . . . S. 247.
b) Flächenmaaße . . . . S. 248.
c) Maaße für Flüssigkeiten . . . . . S. 249.

d) Maaße für Getraide, und trockene Waaren . S. 250.
e) Gewichte . . . . S. 251.
f) Römische Münzen . . . . S. 254.

B) Maaße der Griechen:
a) kleinere Linien- und Längenmaaße . . . S. 255.
b) Reisemaaße der Alten . . . . S. 257.
c) Maaße für Flüssigkeiten . . . . . . S. 258.
d) Getraidmaaße . . . . S. 259.
e) Münzen und Gewichte der Griechen . . . S. 261.
Verschiedene Talente und Drachmen der Griechen S. 262.

C) Hebräische Maaße:
a) Längenmaaße . . . . S. 263.
b) Maaße der Flüssigkeiten . . . . . . S. 263.
c) Getraidmaaße . . . . S. 263.
d) Münzen und Gewichte . . . . . . S. 264.

II. Abtheilung.

Die in verschiedenen Ländern und Städten üblichen Maaße und Gewichte im Verhältnisse zu den französischen und baierischen.

A) Tabellen:

I. Das Fußmaaß betreffend . . . . S. 265.
II. Das Ellenmaaß . . . . S. 267.
III. Das Meilenmaaß . . . . . S. 269.
IV. Die Getränkmaaße . . . . . S. 270.
V. Die Getraidmaaße . . . . . S. 272.
VI. Die Gewichte . . . . S. 275.

B) Das System der neuen französischen Maaße und Gewichte . . . . S. 278.

I. Hauptstück.

Von den Decimalbrüchen, und von der Ausziehung der Quadrat- und Kubik-Wurzeln in Zahlen.

I. Abschnitt.

Von den Decimal-Brüchen.

I.

Einleitung zu den vier Rechnungsarten mit den Decimal-Brüchen.

§. 1.

Erklärungen.

Decimal- oder zehentheilige Brüche, wie dieses schon im II. Theile §. 4. b. (II. §. 4. b.) erwähnt wurde, sind jene Brüche, die zum Nenner immerhin 1 mit angehängten Nullen haben, bey welchen also der Nenner allezeit 10 oder ein solches Product ist, das man erhält, wenn man die Zahl 10 nach den im I. Theile §. 51. und §. 57. (I. §. 51. und §. 57.) aufgestellten Regeln mehrmal als Factor setzt.

Daher sind z. B. die Brüche $^5/_{10}$, $^7/_{100}$, $^{448}/_{1000}$ ꝛc. Decimalbrüche, weil der erste von diesen Brüchen die Zahl 10, der zweyte die Zahl 100, und der

dritte die Zahl 1000 zum Nenner hat, und 100 = 10 × 10, 1000 = 10 × 10 × 10 ꝛc.

Man heißt diese Brüche deßwegen zehentheilige Brüche, Decimal-Brüche, oder Decimalen (vom latein. Worte „decem, zehen"), weil sie zum Nenner die Zahlen 10, 100, 1000, 10000, 100000 ꝛc. haben, und somit von den Ganzen jederzeit zehente, hundertste, tausendste, zehentausendste, hunderttausendste Theile, oder wie man sich kürzer ausdrückt, Zehentel, Hundertel, Tausendel, Zehentausendel, Hunderttausendel ꝛc. ausdrücken.

§. 2.

Lehrsatz:

Jeder Decimalbruch kann als eine Summe betrachtet werden, die man erhält, wenn man der Ordnung nach von der Linken zur Rechten die Ziffern des Zählers, und zwar das erste mit dem Nenner 10, das zweyte mit dem Nenner 100, das dritte mit dem Nenner 1000 ꝛc., als Summanden anschreibt, und dann diese addirt.

Beweis:

1) Es sey z. B. der Decimalbruch $^{12345}/_{100000}$ gegeben. Man schreibe nun die Ziffern des Zählers, und zwar 1 mit dem Nenner 10, 2 mit dem Nenner 100 ꝛc., als Summanden an, man erhält $^{1}/_{10} + {}^{2}/_{100} + {}^{3}/_{1000} + {}^{4}/_{10000} + {}^{5}/_{100000}$.

2) Nach den bey der Addition der gemeinen Brüche aufgestellten Regeln (II. §. 24.) addire man diese Brüche, nachdem man sie vorhin unter einerley Benennung gebracht hat. Man erhält, da in diesem Falle bey den Decimalen der größte Nenner durch alle übrigen Nenner ohne Rest theilbar ist, die Summe $^{12345}/_{100000}$. Man schreibt nämlich, um auf die einfachste Weise zu verfahren, unter einen jeden Bruch den Quotienten, den man erhält, wenn man mit den

Nennern der Brüche den größten Nenner dividirt, multiplicirt damit den Zähler und Nenner des oben stehenden Bruches, und addirt dann die Brüche auf nachstehende Weise:

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{10} & + & \frac{2}{100} & + & \frac{3}{1000} & + & \frac{4}{10000} & + & \frac{5}{100000} \\ 10000, & & 1000, & & 100, & & 10, & & 1 \end{array}$$

$$\frac{10000}{100000} + \frac{2000}{100000} + \frac{300}{100000} + \frac{40}{100000} + \frac{5}{100000}$$

$$= \frac{10000 + 2000 + 300 + 40 + 5}{100000} = \frac{12345}{100000}.$$

3) Um deswillen kann der gegebene Decimalbruch wirklich auf die angegebene Weise als eine Summe betrachtet werden, oder $\frac{12345}{100000} = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000} + \frac{5}{100000}$.

Was von diesem Decimalbruche erwiesen wurde, gilt offenbar für einen jeden anderen Decimalbruch; es ist daher z. B. $\frac{11111}{100000} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000}$, $48\frac{506}{100} = 48 + \frac{5}{10} + \frac{0}{100}$ (kein Hundertel) $+ \frac{6}{1000}$, $\frac{55555}{100000} = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{5}{100000}$ ꝛc.

I. Zusatz: $1 : 10 = \frac{1}{10}$, $\frac{1}{10} : 10 = \frac{1}{100}$, $\frac{1}{100} : 10 = \frac{1}{1000}$, $\frac{1}{1000} : 10 = \frac{1}{10000}$, $\frac{1}{10000} : 10 = \frac{1}{100000}$ ꝛc. Eben so ist $5 : 10 = \frac{5}{10}$, $\frac{5}{10} : 10 = \frac{5}{100}$, $\frac{5}{100} : 10 = \frac{5}{1000}$ ꝛc. (II. §. 6. B.), und umgekehrt z. B. $\frac{1}{100000} \times 10 = \frac{1}{10000}$, $\frac{1}{10000} \times 10 = \frac{1}{1000}$, $\frac{1}{1000} \times 10 = \frac{1}{100}$, $\frac{1}{100} \times 10 = \frac{1}{10}$, $\frac{1}{10} \times 10 = 1$, dann $\frac{5}{100000} \times 10 = \frac{5}{10000}$, $\frac{5}{10000} \times 10 = \frac{5}{1000}$, $\frac{5}{1000} \times 10 = \frac{5}{100}$, $\frac{5}{100} \times 10 = \frac{5}{10}$, $\frac{5}{10} \times 5 = 5$ (II. §. 6. A.), d. h., der 10te Theil von 1 giebt $\frac{1}{10}$ (1 Zehentel), der 10te Theil von $\frac{1}{10}$ giebt $\frac{1}{100}$ (1 Hundertel), der 10te Theil von $\frac{1}{100}$ giebt $\frac{1}{1000}$ (1 Tausendel) ꝛc.; ferner der 10te Theil von 5 giebt $\frac{5}{10}$ (5 Zehentel), der 10te Theil von $\frac{5}{10}$ giebt $\frac{5}{100}$, der 10te Theil von $\frac{5}{100}$ giebt $\frac{5}{1000}$ ꝛc., und umgekehrt z. B. das Zehenfache von $\frac{1}{100000}$ giebt $\frac{1}{10000}$, das Zehenfache von $\frac{5}{10000}$ giebt $\frac{5}{1000}$ ꝛc., dann das Zehenfache von $\frac{5}{100000}$ giebt $\frac{5}{10000}$, das Zehenfache von $\frac{5}{10000}$ giebt $\frac{5}{1000}$ ꝛc.

Gleichwie demnach im Decimalsysteme bey ganzen

Zahlen jedes folgende Ziffer von der rechten zur linken Seite einen zehenmal größeren Localwerth erhält (I. §. 14.), eben so bekömmt auch bey den Decimal-Brüchen jedes folgende Ziffer des Zählers von der Rechten zur Linken einen Localwerth, der das Zehenfache desjenigen Werthes, den das Ziffer an der unmittelbar vorhergehenden Stelle haben würde, und umgekehrt nimmt von der Linken zur Rechten der Localwerth der Decimalziffern immer um das Zehenfache ab; weßwegen bey denselben der Localwerth durch nachstehendes Gesetz bestimmt ist:

Bey Decimalbrüchen erhält jedes folgende Ziffer von der Linken zur Rechten einen Werth, der nur der zehente Theil desjenigen Werthes ist, den das Ziffer an der unmittelbar vorhergehenden Stelle haben würde.

II. Zusatz: Das nach den Einern, somit nach den ganzen Zahlen, von der Linken zur Rechten fortgesetzte Decimalsystem führt auf die Decimalbrüche; es kann daher der Localwerth der Ziffern mittels der Decimalbrüche immer, d. h., ins Unendliche von der Linken zur Rechten verkleinert werden, gleichwie derselbe bey ganzen Zahlen von der Rechten zur Linken immer vergrößert werden kann, indem sowohl bey den ganzen Zahlen, als auch bey den Decimalbrüchen, zehen niedere Einheiten zusammen genommen die nächst höhere Einheit geben, und der zehente Theil der höheren Einheit immerhin die nächstniedere Einheit ist (I. §. 15.).

§. 3.

Aufgabe, Decimalbrüche richtig anzuschreiben, und auszusprechen.

Auflösung:

Man könnte die Decimalbrüche eben so, wie die gemeinen Brüche, anschreiben, und lesen, indem man

oben den Zähler und unten den Nenner hinschreibt, während man zwischen dem Zähler und Nenner das Bruchzeichen macht, und dann den Bruch auf die bekannte Weise ausspricht.

Indessen werden sie aber viel einfacher und bequemer auf folgende Weise angeschrieben, und gelesen:

1) Sind den Brüchen Ganze beygefügt, und hat man somit einen gemischten Decimalbruch, so schreibe man links zuerst die Ganzen, und mache dann rechts an dieselben ein Comma (,) hin. Kommen keine Ganzen vor, und hat man somit einen ungemischten Decimalbruch, so schreibe man an die Stelle der Ganzen eine Null, und mache rechts, wie vorhin, ein Comma, zum Zeichen, daß die folgenden Ziffern von der Linken zur Rechten Decimalen sind.

2) Nun schreibe man in der nämlichen Linie, die Ziffern des Zählers, d. h., die Decimalen, und schreibe den Nenner gar nicht an.

3) Kommen in dem Zähler des Decimalbruches so viele Ziffern oder Stellen vor, als der Nenner Nullen hat, so schreibt man nach dem Comma den Zähler unverändert ohne den Nenner hin.

Kommen aber im Zähler weniger Stellen vor, als der Nenner Nullen hat, so setze man unmittelbar nach dem Comma, somit links vor den Decimalen, so viele Nullen, als erfordert werden, damit im Zähler so viele Stellen vorkommen, als der Nenner Nullen hat.

4) Bey solchen Brüchen, um sie zu lesen, spricht man dann zuerst den Zähler und dann den Nenner aus, der immerhin 1 mit so vielen angehängten Nullen ist, als viel Stellen im Zähler

vorkommen, wo dann, im Falle unmittelbar nach dem Comma Nullen vorkommen, dieselben nicht ausgesprochen werden können, ausser man würde sagen, kein Zehentel, kein Hundertel ꝛc., welches aber ganz überflüssig ist.

5) Die Ganzen werden allezeit, wie dieses die gewöhnliche Ordnung erfodert, indem wir von der linken zur rechten Seite lesen, zuerst ausgesprochen, und nach denselben das Comma mittels des Wortes „Ganze" gelesen. Sind keine Ganzen da, und hat man also Null und Comma (0,) vor sich, so sagt man gleich anfangs „kein Ganzes."

6) Drückt ein gemischter oder ungemischter Decimalbruch eine benannte Zahl aus, so schreibt und liest man die Benennung jener Ganzen, von welchen die Rede ist, nach dem Decimalbruche.

Beyspiele:

Die Brüche $^{425}/_{1000}$, $48\,^{1415}/_{10000}$, $^{5}/_{10000}$, $0,^{400}/_{100000}$, $0,^{333}/_{1000}$ Centner, $458\,^{14}/_{100}$ fl. werden demnach so geschrieben und gelesen „0,425 kein Ganzes 425 Tausendel, 48,1415 acht und vierzig Ganze 1415 Zehentausendel, 0,0005 kein Ganzes 5 Zehentausendel, 0,00400 kein Ganzes 400 Hunderttausendel, 0,333 Centn. kein Ganzes 333 Tausendel Centner, 458,14 fl. vier Hundert acht und fünfzig Ganze 14 Hundertel Gulden."

Nach §. 2. könnte z. B. der Decimalbruch 0,435 auch so gelesen werden „kein Ganzes 4 Zehentel 3 Hundertel und 5 Tausendel;" indessen ist es aber viel bequemer und einfacher, wenn man liest „kein Ganzes 435 Tausendel."

Anmerkung: Weil die Ganzen von dem Zähler des Decimalbruches, im Falle der Nenner desselben nicht angeschrieben wird, durch ein Comma getrennt werden, so habe ich, um dadurch jedem Mißverständnisse vorzubeugen, beym Numeriren im I. Hauptstücke des I. Theiles die Tausende mit einem Puncte bezeichnet. So oft

demnach zwischen den Ziffern ein Comma steht, und dasselbe kein Unterscheidungszeichen ist, so drückt es allezeit aus, daß die linksstehenden Ziffern eine ganze Zahl, hingegen aber die rechtsstehenden Ziffern den Zähler eines Decimalbruches bezeichnen.

§. 4.

Lehrsatz:

A) Hängt man den Decimalen, d. h., dem Zähler des Decimalbruches rechts am Ende Nullen an, so wird dadurch der Werth derselben nicht verändert.

B) Im Gegentheile aber wird der Werth der Decimalbrüche so oft um das Zehenfache vermindert, als viel Nullen unmittelbar nach dem Comma links vor den Decimalen hingesetzt werden.

Beweis von A.

1) Werden dem Zähler des Decimalbruches rechts am Ende wie immer viele Nullen angehängt, so müssen auch im Nenner, welcher nicht geschrieben wird, eben so viele Nullen gedacht werden, weil der Nenner immer so viele Nullen haben muß, als viele Ziffern oder Stellen im Zähler vorkommen.

2) Dem Zähler und Nenner eines Bruches gleich viele Nullen anhängen heißt eben so viel, als den Zähler und Nenner mit den Zahlen 10 „ 100„ 1000 rc., somit mit der nämlichen Zahl multipliciren (I. §. 53.).

3) Der Werth des Bruches bleibt unverändert, wenn man den Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl entweder multiplicirt, oder aber dividirt (II. §. 7.).

4) Also kann man bey den Decimalbrüchen, ohne ihren Werth zu verändern, wie immer viele Nullen am Ende rechts beysetzen, und aus den nämlichen Gründen die am Ende vorkommenden Nullen ohne Veränderung des Werthes ausstreichen oder weglassen.

Die am Ende angehängten Nullen drücken nämlich aus, daß diejenigen Einheiten, die sie vermöge der ihnen zukommenden Nenner bezeichnen, gar nicht vorhanden sind (§. 2.); weßwegen, im Falle bey den Decimalen am Ende Nullen angehängt, oder die vorkommenden weggelassen werden, dieselben hinsichtlich ihres Werthes weder vergrößert noch verkleinert werden.

Beweis von B.

1) Zufolge des im §. 2. anfgestellten Lehrsatzes drückt nach dem Comma von der Linken zur Rechten das erste Ziffer Zehentel, das zweyte Hundertel, das dritte Tausendel, das vierte Zehentausendel ꝛc. aus.

2) So viel nun links unmittelbar nach dem Comma vor den Decimalen Nullen hingesetzt werden, um so viele Stellen werden dieselben von der Linken zur Rechten gerückt.

3) Weßwegen ihr Localwerth so oft um das Zehenfache vermindert wird, als viele Nullen unmittelbar nach dem Comma links vor den Decimalen hingeschrieben werden.

Es drückt daher z. B. der Decimalbruch 0,5 eben so viel aus, als 0,5000 und der Decimalbruch 0,400 beträgt dem Werthe nach eben so viel, als 0,4.

Hingegen drückt aber der Bruch 0,5 zehenmal größere Theile aus, als der Bruch 0,05 und der Bruch 0,05 wieder zehenmal größere Theile als der Decimalbruch 0,005; indem der Werth der Decimalen von der Linken zur Rechten eben so, wie jener der ganzen Zahlen, immer um das Zehenfache abnimmt.

§. 5.

Lehrsatz:

A) **Ein Decimalbruch wird mit 10 „ 100 „ 1000 ꝛc., d. h., mit 1 sammt angehängten Nullen multiplicirt, wenn man das**

Comma um so viele Stellen von der Linken zur Rechten rückt, als der Multiplicator Nullen hat.

B) Ein Decimalbruch wird mit 10 „ 100 „ 1000 ꝛc., d. h., mit 1 sammt angehängten Nullen dividirt, wenn man das Comma um so viele Stellen von der Rechten zur Linken rücket, als der Divisor Nullen hat.

Beweis von A.

1) Einen Decimalbruch mit 10 „ 100 „ 1000 ꝛc. multipliciren heißt denselben 10 „ 100 „ 1000 mal ꝛc. setzen (I. §. 45. a.).

2) Rückt man nun das Comma um 1 „ 2 „ 3 ꝛc. Stellen von der Linken zur Rechten, so erhält jedes Ziffer im Zähler des Decimalbruches einen 10 „ 100 „ 1000 mal ꝛc. größeren Localwerth.

3) Also geschieht eben dadurch die verlangte Multiplication.

Beweis von B.

1) Mit 10 „ 100 „ 1000 ꝛc. eine Zahl dividiren heißt eben so viel, als vom Dividend den zehenten, hundertsten, tausendsten Theil setzen.

2) Setzt man nun das Comma um 1 „ 2 „ 3 ꝛc. Stellen von der Rechten zur Linken, so erhält jedes Ziffer einen Localwerth, der nur der 10te, 100te, 1000te ꝛc. desjenigen Werthes ist, den das Ziffer an der vorigen Stelle gehabt hat.

3) Also wird dadurch mit 10 „ 100 „ 1000 ꝛc. dividirt, daß man das Comma um so viele Stellen von der Rechten zur Linken rücket, als Nullen der Divisor enthält.

Daher ist z. B. $0{,}3 \times 10 = 3$ und $0{,}3456 \times 1000 = 345{,}6$; ferner $23{,}4 : 10 = 2{,}34$ und $456{,}4 : 100 = 4{,}564$.

I. Zusatz: Sind bey der Multiplication nicht genug Stellen vorhanden, so ergänzt man die fehlen-

den mit Nullen, welche zur rechten Seite hingesetzt werden; z. B. 0,3 × 1000 = 300.

II. Zusatz: Sind bey der Division nicht genug Stellen vorhanden, so füllt man dieselben mit Nullen aus, welche gleich unmittelbar nach dem Comma den Decimalen zur linken Seite hingesetzt werden; z. B. 23,4 : 1000 = 0,0234.

III. Zusatz: Gleichwie ganze Zahlen mit 10, 100, 1000 ꝛc. multiplicirt werden, wenn man ihnen am Ende 1, 2, 3 ꝛc. Nullen anhängt (I. §. 53.), eben so werden auch ganze Zahlen mit 1 sammt angehängten Nullen, d. h., mit 10, 100, 1000 ꝛc. dividirt, wenn man von der rechten zur linken Seite das Comma nach so vielen Stellen setzet, als der Divisor Nullen hat, und dann die links stehenden Ziffern als eine ganze Zahl, hingegen aber die Ziffern, welche rechts nach dem Comma folgen, als Decimalen betrachtet. Daher ist z. B. 45679 : 1000 = 45,679; ferner 689301 : 1000000 = 0,689301 und 4 : 1000, = 0,004 ꝛc.

§. 6.

Aufgabe, Ganze in Decimalen umzuwandeln, oder die Decimalbrüche in solche Decimalbrüche zu verändern, die einen größeren Nenner haben.

Auflösung:

1) Man setze nach den Ganzen das Comma mit einer beliebigen Anzahl von Nullen.

2) Soll man aber die Decimalbrüche in solche Brüche verwandeln, die größere Nenner haben, so hänge man den Decimalen rechts am Ende Nullen an, wodurch der Werth nicht verändert wird (§. 4. A.).

Daher ist z. B. 15 = 15,0000 .... und 12,56 = 12,56000 ....

§. 7.

Aufgabe, gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln.

Auflösung:

1) Ist der gemeine Bruch ein ächter Bruch, so schreibe man Null, und rechts neben hin ein Comma, zum Zeichen, daß hier keine Ganzen vorkommen.

2) Zum Zähler des Bruches setze man Null, dividire mit dem Nenner, und setze den Quotienten rechts nach dem Comma hin.

3) Zum Reste, im Falle einer bleibt, setze man Null, dividire mit dem nämlichen Divisor, welcher der Nenner des anfangs gegebenen Bruches ist, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis entweder kein Rest bleibt, oder aber bis man, im Falle immerhin ein Rest bleiben sollte, so viele Decimalen gefunden hat, als der vorliegenden Aufgabe gemäß nothwendig sind, um das noch Fehlende als verschwindend betrachten zu können.

4) Ist der gemeine Bruch ein unächter Bruch, so ziehe man allererst die Ganzen heraus, mache nach den Ganzen das Comma, und verfahre dann beym Reste auf die eben angegebene Weise.

So lange bey der Division noch ein Rest bleibt, so ist der gefundene Decimalbruch dem gegebenen gemeinen Bruche nicht ganz gleich; dieser Unterschied wird aber immer unmerklicher, je mehr Decimalstellen gesucht werden; weßwegen in diesem Falle der gemeine Bruch durch **Annäherung** in einen Decimalbruch verwandelt wird.

Geht die Division genau auf, und erhält man somit einmal keinen Rest, so erhält man Decimalbrüche, die den gegebenen gemeinen Brüchen nach aller

Schärfe gleich sind; solche Decimalbrüche werden endliche Decimalbrüche genannt.

Erhält man aber immerhin, so oft man die Division vornimmt, einen Rest, und kann somit der gemeine Bruch nur durch Annäherung in einen Decimalbruch verwandelt werden, so erhält man Decimalbrüche, welche den gegebenen Brüchen nie ganz gleich sind, und deßhalb unendliche Decimalbrüche genannt werden.

I. Beyspiel:

Es sey der gemeine Bruch $^3/_4$ in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung:

1) Weil $^3/_4$ ein ächter Bruch ist, so schreibe man Null, und rechts neben hin das Comma.

2) Zu 3 setze man 0, man erhält 30, dividire mit 4, und schreibe den Quotienten 7 rechts nach dem Comma.

3) Zum Reste 2 setze man wieder Null, man erhält 20, und dividire abermal mit 4, man erhält als den zweyten Quotienten 5, den man ebenfalls rechts hinschreibt, daher ist nun $^3/_4 = 0{,}75$.

Auf diese Weise ist der gemeine Bruch $^3/_4$ in den Decimalbruch 0,75 verwandelt worden.

II. Beyspiel:

Es sey der Bruch $^{47}/_2$ in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung:

1) Man ziehe die Ganzen heraus, und mache nach denselben das Comma.

2) Zum Reste 1 setze man 0, man erhält 10, und dividire wieder mit 2, der Quotient 5 giebt den Zähler des Decimalbruches. Daher ist nun $^{47}/_2 = 23{,}5$.

Deßwegen ist der unächte Bruch $^{47}/_2$ in den gemischten Decimalbruch 23,5 verwandelt worden.

III. Beyspiel:

Es sey der gemeine Bruch $^1/_3$ in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung:

1) Man schreibe Null, und mache dann rechts das Comma, weil dieser Bruch ein ächter Bruch ist.

2) Zum Zähler 1 setze man Null, man erhält 10; diese Zahl dividire man mit 3, und schreibe den erhaltenen Quotienten 3 rechts nach dem Comma.

3) Es bleibt immer der Rest 1, und man muß auch immer mit dem Divisor 3 dividiren; um deswillen erhält man, man mag 10 wie immer oft mit 3 dividiren, jederzeit die Zahl 3 zum Quotienten.

Daher kann man entweder die Division auf eine beliebige Weise mehrmal fortsetzen, oder aber 3 so oft an die Stelle der Decimalen, als man will oder es die Aufgabe erfodert, hinschreiben, weil man in diesem Beyspiele, wie es eben bemerkt wurde, schon zum voraus weiß, daß man immer 3 zum Quotienten erhalten wird.

Auf diese Weise ist nun der gemeine Bruch $1/3$ durch Annäherung in den unendlichen Decimalbruch 0,33333 .... verwandelt worden.

Grund des Verfahrens.

1) Erhält man einen endlichen Decimalbruch, d. h., einen solchen, der dem gegebenen gemeinen Bruche ganz gleich ist, so hat man durch diese Verfahrungsweise den Zähler und Nenner des gegebenen Bruches mit der nämlichen Zahl multiplicirt, und dividirt; wobey der Werth des Bruches nicht verändert wird (II. §. 7).

3) In Absicht auf die unendlichen Decimalbrüche geschieht im Grunde das Nämliche; der Unterschied besteht nur darinn, daß bey der Division immer ein Rest bleibt, und daher der gefundene Bruch dem gegebenen nie ganz gleich ist.

Es ist offenbar a) $3/4 = \frac{3 \,.\, 100}{4 \,.\, 100} = 300/400 = \frac{300 : 4}{400 : 4}$ $= 75/100 = 0{,}75$; und daher ist auch $3/4 = 0{,}75$.

b) $47/2 = \frac{47 \,.\, 10}{2 \,.\, 10} = 470/20 = \frac{470 : 2}{20 : 2} =$ $235/10 = 23{,}5$; daher ist auch $47/2 = 23{,}5$.

c) $\frac{1}{3} = \frac{1 \,.\, 100000 \ldots}{3 \,.\, 100000 \ldots} = \frac{100000 \ldots}{300000 \ldots}$
$= \frac{100000 \ldots : 3}{300000 \ldots : 3} = \frac{33333 \ldots}{100000 \ldots} = 0{,}33333 \ldots$, daher ist auch $\frac{1}{3} = 0{,}33333 \ldots$

§. 8.

Gesetze der unendlichen Decimalbrüche.

Wenn man z. B. die gemeinen Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$ rc. in Decimalbrüche verwandelt, so erhält man unendliche Decimalbrüche, bey welchen jederzeit ein Rest bleibt, man mag die Division so lange fortsetzen, als man nur immer will.

Dabey entdecken sich dann folgende Gesetze:

1) Einige wiederholen immer das nämliche Ziffer; z. B.
a) $\frac{1}{3} = 0{,}3333 \ldots$ b) $\frac{2}{3} = 0{,}66666 \ldots$

2) Andere wiederholen immer zwey, drey, oder mehrere Ziffern; z. B.
a) $\frac{1}{11} = 0{,}0909 \ldots$ b) $\frac{3}{11} = 0{,}2727 \ldots$
c) $\frac{8}{27} = 0{,}296296 \ldots$
d) $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857 \ldots$

3) Andere endlich wiederholen nach einem, zwey, oder auch mehreren ungleichen Ziffern immer eine Anzahl von gleichen Ziffern; z. B.
a) $\frac{1}{6} = 0{,}1666 \ldots$ b) $\frac{1}{15} = 0{,}0666 \ldots$
c) $\frac{5}{12} = 0{,}4166 \ldots$ d) $\frac{7}{48} = 0{,}1458333 \ldots$

§. 9.

Aufgabe, einen endlichen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Auflösung:

1) Man schreibe den Nenner des Decimalbruches an, und lasse daher das Comma weg.

2) Wenn es angeht, so verkleinere man den Decimalbruch, welcher nun in der Gestalt eines gemeinen Bruches angeschrieben ist.

3) Man erhält auf diese Weise einen gemeinen

Bruch, der dem gegebenen Decimalbruche ganz gleich ist; weßwegen dadurch die verlangte Veränderung des Decimalbruches in einen gemeinen Bruch vorgenommen wird.

Beyspiel:

Es sey der Bruch 0,625 in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Auflösung:

1) Man lasse die Null und das Comma weg, und schreibe unter den Zähler des Bruches den Nenner 1000.

2) Den Bruch $^{625}/_{1000}$ verkleinere man mit dem größten gemeinen Maaße 125, man erhält $^{5}/_{8}$; daher ist $0,625 = {}^{5}/_{8}$, oder $0,625 = {}^{625}/_{1000} = \frac{625 : 125}{1000 : 125} = {}^{5}/_{8}$.

Eben so ist z. B. auch $0,1875 = {}^{1875}/_{10000} = \frac{1875 : 625}{10000 : 625} = {}^{3}/_{16}$; ferner $0,00025 = {}^{25}/_{100000} = \frac{25 : 25}{100000 : 25} = {}^{1}/_{4000}$.

§. 10.

Aufgabe, einen unendlichen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Auflösung:

1) Den unendlichen Decimalbrüchen, welche nach dem ersten und zweyten Gesetze des §. 8. gehen, gebe man so viele Neuner (9 ...) zum Nenner, als gleiche Ziffern wiederholt werden, und verkleinere dann den Bruch in dieser Gestalt; z. B.

a) $0,333 \ldots = {}^{333}/_{999}$ oder $^{33}/_{99}$ oder $^{3}/_{9} = {}^{1}/_{3}$ indem $\frac{333 : 333}{999 : 333} = {}^{1}/_{3}$, $^{33}/_{99} = \frac{33 : 33}{99 : 33} = {}^{1}/_{3}$, $^{3}/_{9} = \frac{3 : 3}{9 : 3} = {}^{1}/_{3}$.

b) $0,0909 \ldots = {}^{09}/_{99} = \frac{9 : 9}{99 : 9} = {}^{1}/_{11}$.

c) $0{,}296296\ldots = {}^{296}/_{999} = \frac{296:37}{999:37} = {}^{8}/_{27}$.

d) $0{,}142857142857\ldots = {}^{142857}/_{999999} = \frac{142857:142857}{999999:142857} = {}^{1}/_{7}$.

2) Die unendlichen Decimalbrüche, welche nach dem dritten Gesetze des §. 8. gehen, werden in zwey Brüche aufgelöst, wovon der erste ein endlicher mit den Nennern 10 „ 100 „ 1000 rc., der zweyte aber ein unendlicher Decimalbruch ist. Dieser erhält zum Nenner so viele Neuner, als gleiche Ziffern wiederholt werden, mit so vielen angehängten Nullen, als die Zifferstellen des endlichen Decimalbruches betragen. Nun bringt man beide dieser Brüche auf einerley Benennung, addirt sie, und verkleinert dann dieselben.

Die erhaltene Summe giebt den verlangten gemeinen Bruch, aus welchem der unendliche Decimalbruch entstanden ist.

Daher ist z. B.

a) $0{,}1666\ldots = {}^{1}/_{10} + {}^{6}/_{90} = {}^{9}/_{90} + {}^{6}/_{90} = {}^{15}/_{90} = {}^{1}/_{6}$.

b) $0{,}0666\ldots = {}^{0}/_{10} + {}^{6}/_{90} = {}^{6}/_{90} = {}^{1}/_{15}$.

c) $0{,}4166\ldots = {}^{41}/_{100} + {}^{6}/_{900} = {}^{369}/_{900} + {}^{6}/_{900} = {}^{375}/_{900} = \frac{375:75}{900:75} = {}^{5}/_{12}$.

d) $0{,}145833\ldots = {}^{1458}/_{1000} + {}^{3}/_{90000} = {}^{13122}/_{90000} + {}^{3}/_{90000} = {}^{13125}/_{90000} = \frac{13125:1875}{90000:1875} = {}^{7}/_{48}$.

II.

Die vier Rechnungsarten mit den Decimalbrüchen.

A.

Die Addition der Decimalbrüche.

§. 11.

Regel der Addition.

1) Man schreibe sowohl bey den ganzen Zah-

len

len als auch bey den Decimalen die Einheiten des nämlichen Ranges und der nämlichen Benennung unter einander, somit Einer unter Einer, Zehner unter Zehner ꝛc., ferner die Zehentel unter Zehentel, Hundertel unter Hundertel, Tausendel unter Tausendel ꝛc., wodurch die Comma genau unter einander zu stehen kommen.

10) Man verfahre jetzt eben so, wie bey ganzen Zahlen, nach den im I. Theile §. 28. aufgestellten Additions-Regeln, und schreibe das Comma in der Summe genau wieder an jene Stelle, die es bey den Summanden einnimmt.

Beyspiel:

Es seyen die Decimalbrüche 23,981 + 0,097 + 5,271 zu addiren.

Auflösung:

Man schreibe diese Summanden auf die angegebene Weise unter einander, und verrichte dann den aufgestellten Regeln gemäß die Addition:

Summanden	23,981
	0,097
	5,271
Summe	29,349

Daher ist 23,981 + 0,097 + 5,271 = 29,349.

B.

Die Subtraction der Decimalbrüche.

§. 12.

Regel der Subtraction.

1) Man schreibe die gegebenen Summanden auf die so eben bey der Addition angegebene Weise unter einander.

2) Man nehme nun nach den im I. Theile

§. 37. bey den ganzen Zahlen aufgestellten Regeln die Subtraction vor, und setze das Comma im Reste wieder an jene Stelle, die es im Minuend und Subtrahend einnimmt.

I. Beyspiel:

Es sey von 52,003 die Zahl 36,982 zu subtrahiren.

Auflösung:

Man schreibe den Subtrahend unter den Minuend, und nehme den aufgestellten Regeln gemäß die Subtraction vor:

Minuend	52,003
Subtrahend	36,982
Rest	15,021

Daher ist 52,003 — 36,982 = 15,021.

II. Beyspiel:

Von 458 soll die Zahl 396,4578 subtrahirt werden.

Auflösung:

Entweder verwandle man die ganze Zahl nach §. 6. in einen gemischten Decimalbruch, indem man rechts das Comma setzt, und oben an die Stelle der Decimalen 4 Nullen hinschreibet, oder aber man schreibe bloß oben 458 als Minuend, und unten den Subtrahend hin, und nehme dann den gegebenen Regeln gemäß die Subtraction vor:

Minuend	458,0000	oder	458
Subtrahend	396,4578		396,4578
Rest	61,5422		61,5422

Daher ist 458 — 396,4578 = 61,5422.

§. 13.

Grund des Verfahrens in Absicht auf die Addition und Subtraction, wie auch die Probe dieser beiden Rechnungsarten.

1) Den aufgestellten Regeln gemäß schreibt man

bey der Addition und Subtraction immer die Einheiten des nämlichen Ranges, und der nämlichen Benennung unter einander.

2) Man addirt zuerst rechts die Einheiten der niedrigsten Ordnung, dann die nächsthöheren ꝛc., und subtrahirt ebenfalls zuerst die Einheiten der niedrigsten Benennung, dann die nächsthöheren ꝛc. von einander.

3) Sowohl bey den ganzen Zahlen, als auch bey den Decimalen geben jederzeit 10 niedere Einheiten die nächsthöhere Einheit.

Man erhält also wirklich die verlangte Summe, oder Differenz, wenn man auf die angegebene Weise verfährt.

Betrachtet man den Decimalbruch nach §. 2. als eine Summe, so sieht man offenbar, daß kraft der gegebenen Regeln immer solche Brüche unter einander stehen, welche gleiche Nenner haben, die also addirt, oder von einander subtrahirt werden, wenn man bloß die Zähler addirt oder subtrahirt, und dann der Summe oder Differenz wieder den vorigen Nenner giebt, woraus ebenfalls, da die Summe der Zehentel an die Stelle der Zehentel, die Summe der Hundertel an die Stelle der Hundertel ꝛc. geschrieben wird, die Richtigkeit des Verfahrens ersichtlich ist.

Die **Probe** wird auf die nämliche Weise, wie bey ganzen Zahlen, gemacht; um deswillen kömmt hier dasjenige in Anwendung, was im I. Theile §. 29. Anmerk., wie auch in den §§. 41. 42. in Absicht auf die ganzen Zahlen gesagt wurde.

C.

Die Multiplication der Decimalbrüche.

§. 14.

Regel der Multiplication.

1) Man multiplicire die Decimalbrüche wie ganze Zahlen, ohne auf das Comma, welches die Ganzen von den Brüchen trennt, Rücksicht zu nehmen.

2) Im Producte schneide man von der Rechten zur Linken so viele Decimalstellen ab, als in allen Factoren zusammen vorkommen.

3) Sollte das Product nicht so viele Ziffern haben, als abzuschneiden sind, so ersetze man die abgängigen durch Nullen, welche links an die Ziffern hingeschrieben werden. Nach diesen schreibe man das Comma und die Null, zum Zeichen, daß in diesem Falle keine Ganzen vorkommen.

I. Beyspiel:

Es sey die Zahl 2,325 mit 4,23 zu multipliciren.

Auflösung:

Man betrachte den Multiplicand und den Multiplicator wie eine ganze Zahl, und multiplicire 2325 mit 423, man erhält zum Producte 983475, indem $2325 \times 423 = 983475$ (I. §. 51).

2) Weil der Multiplicand drey, der Multiplicator zwey, mithin beide zusammen 5 Decimalstellen haben, so schneide man von der Rechten zur Linken im Producte fünf Decimalstellen ab, man erhält zum verlangten Producte die Zahl 9,83475; weßwegen nun $2{,}325 \times 4{,}23 = 9{,}83475$.

II. Beyspiel:

Es soll 0,005 mit 0,007 multiplicirt werden.

Auflösung:

1) Man betrachte diese beiden Factoren als ganze Zahlen, wo nun die Nullen links keinen Werth haben; daher multiplicire man 5 mit 7, man erhält 35.

2) Beide Factoren haben zusammen sechs Decimalstellen, es muß also auch das Product so viele erhalten. Um deswillen setze man noch links zu 35 vier Nullen hin, und mache dann das Comma, man erhält zum Producte den Decimalbruch 0,000035; daher ist $0{,}005 \times 0{,}007 = 0{,}000035$.

III. Beyspiel:

Es seyen folgende Zahlen mit einander zu multipliciren: „4,5 × ,36 × 0,004 × 7,48."

Auflösung:

1) Man betrachte die Decimalen wie ganze Zahlen, und multiplicire, man erhält zum Producte 4847040, indem 45 × 36 × 4 × 748 = 4847040 (I. §. 57).

2) Alle Factoren haben zusammen sechs Decimalstellen, man schneide also von der Rechten zur Linken im Producte 6 Decimalstellen ab.

Daher ist nun 4,5 × 36 × 0,004 × 7,48 = 4,847040 = 4,84704.

§. 15.

Beweis, die Multiplication mit den Decimalbrüchen betreffend.

1) Wenn man die gegebenen Factoren in gemeine Brüche verwandelt, ohne dabey einige Verkleinerungen vorzunehmen, so müssen Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplicirt werden; das Product der Zähler giebt den Zähler, und das Prodnct der Nenner den Nenner jenes Bruches, der das verlangte Product ausdrückt (II. §. 33).

2) Bey den Decimalbrüchen werden nur die Zähler angeschrieben, und der Nenner besteht dann aus 1 mit so vielen angehängten Nullen, als Stellen im Zähler vorkommen. Betrachtet man also bey der wirklichen Multiplication die Decimalen als ganze Zahlen, so erhält man das Product der Zähler.

3) Das Product der Nenner besteht aus 1 mit so vielen Nullen, als die Factoren zusammen Decimalstellen haben (I. §. 55.); will man also dieses Product nicht anschreiben, so muß man im Zähler von der Rechten zur Linken so viele Decimalstellen abschneiden, als Nullen vorhanden sind, mithin die gegebenen Factoren zusammen Decimalstellen enthalten.

Daher ist z. B. 2,325 × 4,23 = 2 $^{325}/_{1000}$ ×

$4\,{}^{23}/_{100} = {}^{2325}/_{1000} \times {}^{423}/_{100} = {}^{983475}/_{100000} = 9{,}83475$; ferner $0{,}005 \times 0{,}007 = {}^{5}/_{1000} \times {}^{7}/_{1000} = {}^{35}/_{1000000} = 0{,}000035$.

§. 16.
Die abgekürzte Multiplication der Decimalbrüche.

Kommen in den Decimalbrüchen sehr viele Stellen vor, so wäre es zu mühsam, wenn man den bisher aufgestellten Regeln gemäß die Multiplication mit jedem Ziffer des Multiplicators vornehmen müßte, um alle Partialproducte auszusetzen.

Dieses Letztere ist bey den unendlichen Decimalbrüchen nicht einmal möglich, weil bey denselben nie alle Ziffern angeschrieben werden können.

In diesem Falle bedient man sich der abgekürzten Multiplication, welche nach folgenden Regeln ausgeführet wird:

1) Aus der vorliegenden Aufgabe ermesse man, wie viele Decimalstellen im Producte vorkommen müssen, damit das noch Fehlende als verschwindend betrachtet werden kann, und somit das gefundene Product so genau ist, als es die vorkommende Aufgabe erfordert.

2) Man fange die Multiplication, nachdem man die beiden Factoren so unter einander geschrieben hat, daß die Comma genau unter einander stehen, zur linken Seite an, multiplicire mit dem ersten links stehenden Ziffer von der Rechten zur Linken den oben stehenden Multiplicand, und schreibe das erhaltene erste Partialproduct von der Rechten zur Linken so unter den Strich, daß das Comma desselben genau unter die Comma der beiden Factoren zu stehen kömmt.

3) Bey dieser ersten Multiplication multiplicire man, im Falle die Anzahl der vorkommenden

Decimalstellen nicht besonders groß ist, alle Ziffern des Multiplicands, oder aber, indem man die übrigen zur rechten Seite wegläßt, nur so viele von der Rechten zur Linken, daß das erste auf diese Weise erhaltene Product etwa um 2 Decimalstellen mehr hat, als das Totalproduct der erforderlichen Genauigkeit wegen haben muß.

4) Mit dem zweyten links stehenden Ziffer des Multiplicators multiplicire man von der Rechten zur Linken die vorhin im Multiplicand zur Multiplication genommenen Ziffern mit Ausnahme des letzten rechts stehenden Ziffers, welches man bey dieser Multiplication übergeht, und schreibe das letzte Ziffer dieses Productes rechs unter das letzte Ziffer des vorigen Productes, und dann die übrigen Ziffern der Ordnung nach von der Rechten zur Linken.

5) Bey der dritten Multiplication übergehe man von der Rechten zur Linken das vorletzte, bey der vierten das drittletzte Ziffer ꝛc., und schreibe dann das letzte Ziffer aller folgenden Producte jederzeit unter das letzte rechts stehende Ziffer des ersten Partialproductes, und dann die übrigen Ziffern der Ordnung nach von der Rechten zur Linken, während man von der Linken zur Rechten so viele Ziffern zum Multipliciren im Multiplicator nimmt, als man zur erforderlichen Genauigkeit für nöthig erachtet.

6) Die auf diese Weise erhaltenen Partialproducte addire man nun den bekannten Regeln gemäß von der Rechten zur Linken, und schreibe das Comma so im Totalproducte, daß es genau unter die oben stehenden Comma zu stehen kömmt.

B e y s p i e l:

Es sey 0,7142857 mit 0,4285713 zu multipliciren.

A u f l ö s u n g:

1) Man nehme den ersten Factor als Multiplicand, und den zweyten als Multiplicator, und setze diesen so unter jenen, daß die Comma genau unter einander kommen.

2) Mit 4 vielmehr mit 0,4 als dem ersten links stehenden Ziffer des Multiplicators multiplicire man, im Falle die ersten 6 Ziffern des gesuchten Productes zuverläßig seyn sollen, alle Ziffern des Multiplicands, man erhält 0,28571428 zum ersten Partialproducte, indem 0,7142857 × 0,4 = 0,28571428.

3) Nun multiplicire man mit 2, vielmehr mit 0,02 alle Ziffern des Multiplicands mit Ausnahme des äussersten rechtsstehenden Ziffers, man erhält 0,01428570 zum zweyten Partialproducte, indem 0,714285 × 0,02 = 0,01428570.

4) Mit 8 als dem dritten Ziffer des Multiplicators von der Linken zur Rechten, vielmehr mit 0,008 multiplicire man alle Ziffern des Multiplicands mit Ausnahme der beiden letzten rechtsstehenden Ziffern desselben, man erhält 0,00571424 zum dritten Partialproducte, indem 0,71428 × 0,008 = 0,00571424.

5) Setzt man auf diese Weise die Multiplication fort, so erhält man 0,00035710 = 0,7142 × 0,0005 zum vierten, dann 0,00004998 = 0,714 × 0,00007 zum fünften, ferner 0,00000071 = 0,71 × 0,000001 zum sechsten, endlich 0,00000021 = 0,7 × 0,0000003 zum siebenten Partialproducte.

6) Alle diese Partialproducte werden nun in eine Summe gebracht. Weil aber die Nullen, wenn man sie zu Zahlziffern addirt, nichts ändern, und jedes dieser Producte 8 Decimalstellen hat, so schreibe man der Kürze wegen die Nullen gar nicht an, und sorge dafür, daß die Ziffern, welche Einheiten des nämlichen Ranges bezeichnen, genau unter einander zu stehen kommen. Dieses Letztere geschieht, wenn man die

äussersten rechts stehenden Ziffern der Partialproducte, und dann der Ordnung nach die übrigen von der Rechten zur Linken unter einander schreibt, wie aus Nachstehendem ersichtlich ist:

Multiplicand	0,7142857
Multiplicator	0,4285713
Partial-Producte	0,28571428
	0,01428570
	0,00571424
	0,00035710
	0,00004998
	0,00000071
	0,00000021
Total-Product	0,30612222.

Kürzer:

Multiplicand	0,7142857
Multiplicator	0,4285713
Partial-Producte	0,28571428
	1428570
	571424
	35710
	4998
	71
	21
Total-Product	0,30612222

7) In diesem Totalproducte sind höchstens die beiden letzten Ziffern unrichtig; indem das letzte Ziffer offenbar der zur Rechten weggelassenen Ziffern wegen zu klein ist.

Wäre die Multiplication mit allen Ziffern vorgenommen worden, so würde vielleicht auch das vorletzte Ziffer größer werden. Die übrigen 6 Ziffern des gefundenen Productes sind zuverläßig.

Daher ist $0{,}7142857 \times 0{,}4285713 = 0{,}306122 \ldots$

D.

Die Division der Decimalbrüche.

§. 17.

Regel der Division für jenen Fall, wo der Divisor eben so viel Decimalstellen hat, wie der Dividend.

Ist ein Decimalbruch mit einem anderen zu dividiren, so findet der dreyfache Fall Statt, daß der Divisor eben so viel, mehr, oder weniger Decimalstellen hat, als der Dividend.

Hat der Dividend und der Divisor gleich viel Decimalstellen, so beobachtet man folgende Regel:

1) Man dividire wie bey ganzen Zahlen, indem man auf die vorkommenden Comma keine Rücksicht nimmt.

2) Im Quotienten schneide man keine Decimalen ab, und mache somit kein Comma, da derselbe eine ganze Zahl ist.

I. Beyspiel:

Es soll 0,456 durch 0,004 dividirt werden.

Auflösung:

1) Man betrachte die Ziffern vor und nach dem Comma wie ganze Zahlen, und dividire 0456 durch 0004; weil bey ganzen Zahlen die Nullen zur linken Seite überflüssig sind, indem sie da zur Veränderung des Werthes nichts beytragen, so dividire man 456 mit 4, man erhält 114, da 456 : 4 = 114.

2) Weil hier der Divisor eben so viele Decimalstellen hat, wie der Dividend, so ist der gefundene Quotient 114 eine ganze Zahl, bey welcher somit keine Decimalen abgeschnitten werden.

Es ist daher 0,456 : 0,004 = 114.

II. Beyspiel:

Es sey 64,728 durch 0,008 zu dividiren.

Auflösung:

1) Man dividire dem Gesagten gemäß 64728 durch 8; indem man auf das Comma keine Rücksicht nimmt, und man somit die Decimalbrüche mit dem beygefügten Ganzen wie ganze Zahlen betrachtet; man erhält 8091, indem 64728 : 8 = 8091.

2) Weil man hier beiderseits gleichviel Decimalstellen hat, so drückt der gefundene Quotient 8091 eine bloße ganze Zahl aus.

Daher ist 64,728 : 0,008 = 8091.

Beweis:

1) Man verwandle die Decimalbrüche, ohne eine Verkleinerung vorzunehmen, in gemeine Brüche, und richte dann die gemischten Brüche nach der im II. Theile §. 28. aufgestellten Regel ein; man erhält zwey gemeine Brüche von gleichen Nennern.

2) Die Division der gemeinen Brüche geschieht dadurch, daß man den Zähler des Dividends mit dem Nenner des Divisors, und den Zähler des Divisors mit dem Nenner des Dividends multiplicirt; weßwegen der Quotient ein Bruch ist, dessen Zähler ein Product aus dem Zähler des Dividends in den Nenner des Divisors, und dessen Nenner ein Product aus dem Zähler des Divisors in den Nenner des Dividends ist (II. §. 39).

3) Da hier der Divisor und der Dividend gleiche Nenner haben, so muß im Quotienten der Zähler und der Nenner mit der nämlichen Zahl multiplicirt werden; es bleibt also der Quotient unverändert, wenn man diese beiden Factoren ganz wegläßt (II. §. 7).

4) Daher nun bloß diejenige ganze Zahl als Quotient zum Vorscheine kömmt, die man erhält, wenn man den Zähler des Dividends und des Divisors wie eine ganze Zahl betrachtet, und jenen durch diesen dividirt.

Im I. Beyspiele ist 0,456 = $^{456}/_{1000}$, und 0,004 = $^{4}/_{1000}$; daher ist auch 0,456 : 0,004 = $^{456}/_{1000}$: $^{4}/_{1000}$. Es ist aber $^{456}/_{1000} : {}^{4}/_{1000} = \frac{456 \cdot 1000}{4 \cdot 1000} =$

$^{456000}/_{4000} = \frac{456000 : 1000}{4000 : 1000} = {}^{456}/_{4} = 114$; weßwegen auch 0,456 : 0,004 = 114.

Im II. Beyspiele ist 64,728 = 64 $^{728}/_{1000}$ = $^{64728}/_{1000}$, und 0,008 = $^{8}/_{1000}$; daher ist auch 64,728 : 0,008 = $^{64728}/_{1000}$: $^{8}/_{1000}$. Es ist aber $^{64728}/_{1000}$: $^{8}/_{1000} = \frac{64728 . 1000}{8 . 1000} = {}^{64728}/_{8} = 8091$; weßwegen auch 64,728 : 0,008 = 8091.

§. 18.

Regel der Division für jenen Fall, wo der Divisor mehr Decimalstellen hat, als der Dividend.

1) Hat der Divisor mehr Decimalstellen, als der Dividend, so hänge man den Decimalen des Dividends znr rechten Seite so viele Nullen an, bis dieser eben so viel Decimalstellen bekömmt, als im Divisor vorkommen.

2) Weil jetzt im Dividend und Divisor gleichviel Decimalstellen vorkommen, so dividire man nach Vorschrift des vorigen §; der Quotient drückt ebenfalls wieder eine ganze Zahl aus.

I. Beyspiel:

Es sey 0,24 durch 0,00008 zu dividiren.

Auflösung:

1) Weil der Divisor fünf Decimalstellen hat, und der Dividend nur zwey, so hänge man diesem am Ende noch 3 Nullen an, es haben dann beide gleichviel Decimalstellen; weßwegen nun 0,24000 durch 0,00008 zu dividiren ist.

2) Nach den Regeln des vorigen §. erhält man die Zahl 3000 zum Quotienten, indem 0,24000 : 0,00008 = 24000 : 8 = 3000. Daher ist 0,24 : 0,00008 = 3000.

II. Beyspiel:

Es sey 48,36 durch 0,003 zu dividiren.

Auflösung:

1) Man hänge dem Dividend rechts eine Null an, daher nun 48,360 durch 0,003 zu dividiren ist.

2) Nach dem vorigen §. erhält man 16120 zum Quotienten, indem 48,360 : 0,003 = 16120. Daher ist 48,36 : 0,003 = 16120.

III. Beyspiel:

Es sey 1285712 mit 3,004 zu dividiren.

Auflösung:

1) Man verändere nach §. 6. die ganze Zahl in einen Decimalbruch, indem man nach derselben das Comma macht, und ihr am Ende drey Nullen anhängt; weßwegen nun 1285712,000 mit 3,004 zu dividiren ist.

2) Es ist aber 1285712,000 : 3,004 = 428000; um deswillen ist auch 1285712 : 3,004 = 428000.

Beweis:

Der Werth der ganzen Zahlen wird nicht verändert, wenn man sie auf die angegebene Weise in Decimalbrüche verwandelt.

Ueberdieß bleiben auch die Decimalbrüche hinsichtlich des Werthes unverändert, wenn man ihnen am Ende wie immer viele Nullen anhängt (§. 4. A.).

Weßwegen man aus den im vorigen §. angeführten Gründen, da der Dividend eben so viele Decimalstellen hat, als der Divisor, wirklich auf die angegebene Weise den verlangten Quotienten findet.

§. 19.

Regel der Division für jenen Fall, wo der Divisor weniger Decimalstellen hat, als der Dividend.

1) Man betrachte die im Dividend und Divisor vor und nach dem Comma vorkommenden Ziffern als eine ganze Zahl, und nehme nach den im I. Theile bey der Division ganzer Zahlen gegebenen Regeln die Division vor.

2) Man setze im erhaltenen Quotienten das Comma von der Rechten zur Linken nach so vielen Stellen, damit der Quotient mit dem Divisor so viele Decimalstellen hat, als der Dividend.

I. Beyspiel:

Es soll 0,00048 durch 0,6 dividirt werden.

Auflösung:

1) Man dividire 48 mit 6, man erhält 8 zum Quotienten;

2) Von der Rechten zur Linken schneide man vier Decimalstellen ab, und fülle die leeren Stellen zur linken Seite, da in diesem Beyspiele nicht genug Zahlziffern verhanden sind, mit Nullen aus, man erhält 0,0008 zum Quotienten.

Daher ist 0,00048 : 0,6 = 0,0008.

II. Beyspiel:

Es soll 6,35781 mit 3 dividirt werden.

Auflösung:

1) Man betrachte zusammen alle Ziffern des Dividends wie eine ganze Zahl, und dividire somit 635781 mit 3, man erhält 211927 zum Quotienten, indem 635781 : 3 = 211927.

2) Weil der Dividend fünf Decimalstellen hat, und der Divisor eine bloße ganze Zahl ist, so schneide man im Quotienten von der Rechten zur Linken fünf Decimalstellen ab, man erhält 2,11927.

Daher ist 6,35781 : 3 = 2,11927.

III. Beyspiel:

Es soll 206,7696 durch 59,76 dividirt werden.

Auflösung:

1) Man betrachte den Dividend und den Divisor wie eine ganze Zahl, und dividire somit 2067696 mit 5976 (I. §. 69.), man erhält 346 zum Quotienten, indem 2067696 : 5976 = 346.

2) Weil der Dividend um zwey Decimalstellen mehr hat als der Divisor, so schneide man noch im Quotienten von der Rechten zur Linken zwey Decimalstellen ab.

Daher ist 206,7696 : 59,76 = 3,46.

Beweis:

1) Man verwandle die Decimalbrüche in gemeine Brüche, und richte die ungemischten Brüche ein, ohne daß man dabey eine Verkleinerung vornimmt.

2) Man erhält den Quotienten der gemeinen Brüche, wenn man den Zähler des Dividends mit dem Nenner des Divisors, und den Zähler des Divisors mit dem Nenner des Dividends multiplicirt.

3) Der Nenner des Quotienten hat demnach in Absicht auf den Zähler um eben so viele Nullen mehr, als der Dividend mehr Decimalstellen enthält, als der Divisor.

4) Aus diesem Grunde muß man im Quotienten von der Rechten zur Linken so viele Decimalstellen abschneiden, als dieser Ueberschuß beträgt.

Im I. Beyspiele ist 0,00048 = $^{48}/_{100000}$, und 0,6 = $^{6}/_{10}$, daher ist auch 0,00048 : 0,6 = $^{48}/_{100000}$: $^{6}/_{10}$ = $\frac{48 \,.\, 10}{6 \,.\, 100000}$ = $^{480}/_{600000}$ = $\frac{480 \,:\, 6}{600000 \,:\, 6}$ = $^{80}/_{100000}$ = $^{8}/_{10000}$ = 0,0008; weßwegen 0,00048 : 0,6 = 0,0008.

Im II. Beyspiele ist 6,35781 = $6\,^{35781}/_{100000}$ = $^{635781}/_{100000}$, daher ist 6,35781 : 3 = $^{635781}/_{100000}$: 3 = $^{211927}/_{100000}$ = $2\,^{11927}/_{100000}$ = 2,11927; weßwegen 6,35781 : 3 = 2,11927.

Im III. Beyspiele ist 206,7696 = $206\,^{7696}/_{10000}$ = $^{2067696}/_{10000}$, und 59,76 = $59\,^{76}/_{100}$ = $^{5976}/_{100}$, daher ist 206,7696 : 59,76 = $^{2067696}/_{10000}$: $^{5976}/_{100}$ = $\frac{2067696 \,.\, 100}{5976 \,.\, 10000}$ = $^{2067696}/_{597600}$ = $\frac{2067696 \,:\, 5976}{597600 \,:\, 5976}$ = $^{346}/_{100}$ = $3\,^{46}/_{100}$ = 3,46; weßwegen auch 206,7696 : 59,76 = 3,46.

§. 20.
Nähere Bestimmung der Quotienten mittels der Decimalen.

Bleibt bey der Division ganzer Zahlen zuletzt ein Rest, so wird derselbe, wie er noch durch den Divisor dividirt werden soll, dem gefundenen Quotienten beygefügt, wie dieses im I. Theile §. 68. Nro. 9. bemerkt wurde.

Dagegen kann man bey den ganzen Zahlen und auch bey den Decimalbrüchen, im Falle zuletzt noch ein Rest bleibt, den Quotienten auf folgende Weise in Decimalen näher bestimmen:

a) Bleibt bey der Division ganzer Zahlen ein Rest, so mache man, wie die Division bey der ganzen Zahl beendet ist, ein Comma, setze anstatt der folgenden Ziffern so oft eine Null zum jedesmaligen Reste, bis entweder kein Rest bleibt, oder der Quotient durch Annäherung so genau bestimmt ist, als es die vorliegende Aufgabe erfodert, während immerhin mit dem vorigen Divisor die Division fortgesetzt wird.

Die auf diese Weise erhaltenen Ziffern des Quotienten, welche rechts nach dem Comma stehen, bilden dann den Zähler des Decimalbruches, der den Ganzen anstatt des gemeinen Bruches beygesetzt wird, und dessen Nenner so viele Nullen hat, als viel Stellen im Zähler vorkommen.

b) Bleibt bey der Division der Decimalen zuletzt ein Rest, so verfährt man auf die eben angegebene Weise, wo dann der Quotient um so viele Decimalstellen mehr haben muß, als Nullen den Resten zur Fortsetzung der Division beygesetzt wurden.

Was die übrigen Decimalstellen des Quotienten betrifft, so wird ihre Anzahl nach den bisher

über die Division der Decimalbrüche aufgestellten Regeln bestimmt.

I. Beyspiel zu a.

Es sey 27 mit 4 zu dividiren.

Auflösung:

1) 4 in 27 geht 6mal, es bleibt 3 als Rest; man mache also das Comma nach 6 (6,), setze zu 3 eine Null, und dividire 30 mit 4; den Quotienten 7 schreibe man nach dem Comma als das erste Decimalziffer.

2) Zum Reste 2 setze man abermal eine Null, und dividire wieder mit 4, man erhält 5 zum Quotienten, indem 20 : 4 = 5.

Daher ist 27 : 4 = 6,75.

II. Beyspiel zu a.

Es soll 19 dividirt werden mit 3.

Auflösung:

1) 3 in 19 geht 6mal, es bleibt 1 als Rest; man mache also das Comma nach 6 (6,), setze zu 1 eine Null, und dividire 10 mit 3; den Quotienten 3 schreibe man nach dem Comma.

2) Zu diesem Reste setze man eine Null, dividire mit 3, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man der vorliegenden Aufgabe gemäß, da in diesem Beyspiele die Division immer fortgesetzt werden kann, die gehörige Anzahl von Decimalstellen hat.

Es ist daher $^{19}/_{3}$ = 6,33333....

Beyspiel zu b.

Es sey 89,712 durch 37,5 zu dividiren.

Auflösung:

1) Man dividire den aufgestellten Regeln gemäß 89712 durch 375, man erhält der bey a. angegebenen Vorschrift gemäß 239,232 zum Quotienten, indem 89712 : 375 = 239,232.

2) Weil der Dividend um 2 Decimalstellen mehr hat als der Divisor, so rücke man das Comma noch um 2 Stellen von der Rechten zur Linken.

Daher ist 89,712 : 37,5 = 2,39232.

§. 21.

Die abgekürzte Division der Decimalbrüche.

Kommen im Dividend und Divisor viele Decimalstellen vor, so bedient man sich mittels nachstehender Regeln der abgekürzten Division:

1) Man dividire mit dem ersten links stehenden Ziffer des Divisors auf die gewöhnliche Weise, multiplicire mit dem Quotienten den Divisor, und subtrahire das Product vom Dividend.

2) Den Rest dividire man abermal von der Linken zur Rechten mit dem ersten Ziffer des Divisors, multiplicire mit dem Quotienten den vorigen Divisor mit Ausnahme des äussersten rechts stehenden Ziffers, und ziehe das Product ab.

3) Den Rest dividire man wieder mit dem ersten Ziffer des Divisors, und multiplicire damit den Divisor mit Ausnahme der beiden äussersten rechtsstehenden Ziffern.

4) Die Producte und Reste setze man so unter einander, daß immer die äussersten Ziffern rechts, und dann die übrigen der Ordnung nach unter einander zu stehen kommen.

5) Diese Division setze man so lange fort, bis man im Quotienten so viele Decimalstellen hat, als man der vorliegenden Aufgabe gemäß haben muß.

Beyspiel:

Es sey 0,30612222... mit 0,4285713 zu dividiren.

Auflösung:

Dividend	0,30612222...	0,4285713 .... Div.
Product	0,29999991...	0,7142857 .... Quot.
Rest	612231	
Product	428571	
Rest	183660	
Product	171428	
Rest	12232	
Product	8570	
Rest	3662	
Product	3424	
Rest	238	
Product	210	
Rest	28	
Product	28	

—

Die Gründe des Verfahrens sind aus dem, was bey der abgekürzten Multiplication der Decimalbrüche im §. 16. ausführlicher erörtert wurde, ersichtlich.

§. 22.

Einige Bemerkungen in Absicht auf die vier Rechnungsarten mit den Decimalbrüchen.

a) Kommen gemeine Brüche und Decimalbrüche vor, die zu einander addirt, von einander subtrahirt, oder unter sich multiplicirt und dividirt werden sollen, so müssen bey einer und der nämlichen Rechnung Brüche der nämlichen Art vorhanden seyn, und daher entweder die gemeinen Brüche nach §. 7. in Decimalbrüche, oder nach §. 9. und §. 10. die Decimalbrüche in gemeine Brüche verwandelt, und dann die Addition, Subtraction 2c. vorgenommen werden.

b) Die Probe wird bey den vier Rechnungsarten der Decimalbrüche eben so gemacht, wie bey den ganzen Zahlen, und den gemeinen Brüchen.

c) In Absicht auf die benannten Decimalbrüche kömmt hier das in Anwendung, was hinsichtlich der benannten gemeinen Brüche im II. Theile §. 44. bemerkt wurde.

I. Beyspiel zu a.

Es soll zu 3,125 der gemeine Bruch $\frac{1}{3}$ addirt werden.

Auflösung:

1) Man mache den Decimalbruch zu einem gemeinen Bruche, man erhält $\frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$, somit ist $3,125 = 3\frac{1}{8}$, und daher $3,125 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{8} + \frac{1}{3} = 3\frac{11}{24} = 3,458333\ldots$

2) Oder man mache den gemeinen Bruch $\frac{1}{3}$ zu einem Decimalbruche, man erhält $0,33333\ldots.$, somit ist $3,125 + \frac{1}{3} = 3,125 + 0,33333\ldots = 3,45833\ldots. = 3\frac{458}{1000} + \frac{3}{9000} = 3\frac{4122}{9000} + \frac{3}{9000} = 3\frac{4125}{9000} = 3\frac{4125 : 375}{9000 : 375} = 3\frac{11}{24}$.

II. Beyspiel zu a.

Es sey von 0,625 der gemeine Bruch $\frac{3}{8}$, und von $\frac{7}{8}$ der Decimalbruch 0,75 zu subtrahiren.

Auflösung:

1) Um von 0,625 den Bruch $\frac{3}{8}$ zu subtrahiren, mache man entweder den gemeinen Bruch zu einem Decimalbruche, oder diesen zu einem gemeinen Bruche.

Im ersten Falle erhält man, daß $0,625 - \frac{3}{8} = \frac{625}{1000} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = 0,25$.

Im zweyten Falle erhält man, daß $0,625 - \frac{3}{8} = 0,625 - 0,375 = 0,25 = \frac{1}{4}$.

2) Um von $\frac{7}{8}$ den Decimalbruch 0,75 zu subtrahiren, verwandle man entweder den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch, oder diesen in einen gemeinen Bruch.

Im ersten Falle erhält man, daß $\frac{7}{8} - 0,75 = 0,875 - 0,75 = 0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$.

Im zweyten Falle erhält man, daß $\frac{7}{8} - 0,75 = \frac{7}{8} - \frac{75}{100} = \frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{7}{8} - \frac{6}{8} = \frac{1}{8} = 0,125$.

III. Beyspiel zu a.

Es soll $^3/_4$ mit 0,3456 multiplicirt werden.

Auflösung:

1) Man mache entweder den gemeinen Bruch zu einem Decimalbruche, oder diesen zu einem gemeinen Bruche.

Im ersten Falle erhält man, daß $^3/_4 \times 0{,}3456 = 0{,}75 \times 0{,}3456 = 0{,}259200 = 0{,}2592 = {}^{2592}/_{10000} = {}^{162}/_{625}$.

Im zweyten Falle erhält man, daß $^3/_4 \times 0{,}3456 = {}^3/_4 \times {}^{3456}/_{10000} = {}^{10368}/_{40000} = {}^{162}/_{625} = 0{,}2592$.

IV. Beyspiel zu a.

Es sey 0,1875 mit 5 ½ zu dividiren.

Auflösung:

Man verwandle den Decimalbruch in einen gemeimeinen Bruch, oder diesen in einen Decimalbruch.

Im ersten Falle erhält man, daß $0{,}1875 : 5\,^1/_2 = {}^3/_{16} : 5\,^1/_2 = {}^3/_{16} : {}^{11}/_2 = {}^6/_{176} = {}^3/_{88} = 0{,}0340909 \ldots$

Im zweyten Falle erhält man, daß $0{,}1875 : 5\,^1/_2 = 0{,}1875 : 5{,}5 = 0{,}0340909 \ldots = {}^{34}/_{1000} + {}^9/_{99000} = {}^{3366}/_{99000} + {}^9/_{99000} = {}^{3375}/_{99000} = \frac{3375 : 1125}{99000 : 1125} = {}^3/_{88}$.

§. 23.

Wiederholung in Fragen.

1) Welche Brüche heißt man Decimalbrüche; wodurch unterscheiden sich diese von den gemeinen Brüchen?

2) Aus welchem Grunde gilt hinsichtlich des Localwerthes bey den Decimalen das in Absicht auf die ganzen Zahlen aufgestellte Gesetz?

3) Warum ist die Rechnung mit Decimalen viel einfacher als jene mit den gemeinen Brüchen?

4) Welchen Vortheil gewähren die Decimalbrüche in Betreff des bey uns eingeführten Decimalsystemes?

5) Welches Gesetz muß beym Anschreiben und Ausschreiben der Decimalbrüche befolgt werden, wenn die Nenner derselben der Kürze wegen nicht angeschrieben werden?

6) Was tragen die Nullen zur Veränderung des Werthes der Decimalen bey, wenn man sie am Ende, oder gleich unmittelbar nach dem Comma vor den Decimalen hinsetzt?

7) Nach welcher Regel kann man auf eine einfache Weise Decimalbrüche mit 10 „ 100 „ 1000 rc. multipliciren oder dividiren?

8) Was heißt dieses, Decimalbrüche in gemeine Brüche, oder diese in jene verwandeln; in welchem Falle ist es nothwendig, diese Verwandlung vorzunehmen?

9) Welche heißt man endliche, und welche unendliche Decimalbrüche; welche Gesetze werden bey diesen letzteren entdeckt?

10) Welche Vortheile gewähret bey den Decimalbrüchen die abgekürzte Multiplication und Division?

11) Nach welchen Regeln werden die Decimalbrüche addirt, subtrahirt, multiplicirt, und dividirt?

12) Wie ist die Sache anzugehen, wenn bey den vier Rechnungsarten gemeine Brüche und Decimalbrüche zugleich vorkommen?

§. 24.

Beyspiele zur Uebung.

I.

Aus dem Umfange unserer Erde, welcher 5400 deutsche oder geographische Meilen beträgt, lassen sich in der Voraussetzung, daß der Erdkörper wie eine Kugel betrachtet wird, nachstehende Resultate auf folgende Weise berechnen:

a) Dividirt man den Umfang der Erde mit der Ludolphischen Zahl 3,141592...., so erhält man nach den Lehrsätzen der Geometrie den Durchmesser der Erde in geographischen Meilen;

b) Multiplicirt man die Zahl 5400 mit dem vier-

ten Theile des Durchmessers, und dann mit 4 das erhaltene Product, so erhält man die Oberfläche der Erde in geographischen Quadratmeilen;

c) Multiplicirt man endlich die Zahl, welche die Größe der Oberfläche der Erde ausdrückt, mit dem sechsten Theile des Durchmessers der Erde, so erhält man den kubischen Inhalt derselben, d. h., die Größe des Raumes, welchen unser Erdkörper einnimmt.

Es ist nun die Frage:

a) Wie groß ist der Durchmesser der Erde?

b) Wie groß ist ihre Oberfläche?

c) Und endlich wie groß ist die Erde hinsichtlich ihres kubischen Inhaltes?

II.

Wie viele baierische Tagwerke hält ein Feld, das die Gestalt eines Rechteckes hat (I. §. 104. I. Beysp.), und in der Länge 4057,86 Schuh, in der Breite aber 978,5 Schuh im nämlichen Längenmaaße hat?

III.

Wie viele Kubikschuhe im baierischen Decimalmaaße hält ein Gebäude hinsichtlich seines körperlichen Inhaltes, wenn dasselbe die Gestalt eines senkrechten Parallelepipedums hat, und in der Länge 459,7 Schuh, in der Breite 368,9 Schuh, und in der Höhe 150,4 baierische Schuh hält (I. §. 104. II. Beysp.)?

IV.

a) Ein Körper, welcher von zwey gleichen parallelen Kreisen, und nach einem bestimmten Gesetze zugleich von einer krummen Seitenfläche begränzt wird, heißt eine Walze (Cylinder).

b) Ein Körper, welcher von einer geradlinigten Figur, und so vielen Dreyecken, als erstere Seiten hat, begränzt ist, heißt eine Pyramide (Pyramis).

c) Ein Körper, welcher von einem Kreise, und nach einem bestimmten Gesetze zugleich durch eine krumme Seitenfläche begränzt ist, heißt ein Kegel (Conus).

Ueberdieß erhält man nach den Lehrsätzen der Stereometrie den körperlichen Inhalt

a) des Cylinders, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt,

b) der Pyramide, wenn man die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe multiplicirt, und endlich

c) des Kegels, wenn man ebenfalls die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe, oder was eines ist, die Höhe mit dem dritten Theile der Grundfläche multiplicirt.

Nachdem dieses bekannt ist, so werde nun nachstehende Aufgabe aufgelöset:

a) Die Grundfläche eines Cylinders hat 4075,47 baierische Quadratschuh, und seine Höhe 50,3 baierische Schuh;

b) Die Grundfläche einer Pyramide hat 3748,9 baierische Quadratschuh, und ihre Höhe 68,57 baier. Schuh;

c) Endlich die Grundfläche eines Kegels hat 2874,3 baier. Quadratschuh, und seine Höhe 96,3 baier. Schuh.

Wie viele baier. Kubikschuhe hält nun jeder dieser Körper im kubischen Inhalte?

V.

Die Höhe des Thurmes einer Kirche wird so beschrieben: „Von der Erde bis zur Uhr fand man durch vorgenommene Messung 104,5 baier. Schuh; von der Uhr bis zur Kuppel 74,59; von der Kuppel bis zum Kreutz 84,044; und von da bis zum Ende des Kreutzes 1,75 solche Schuh.“ Wie hoch ist nun der ganze Thurm?

VI.

Im Jahre 1616 wurde zu Amsterdam ein Brunnen gegraben, wo man folgende Erdschichten antraf: Dammerde 1,166 Klafter, Torf 1,5 Kl., weichen Thon 1,5 Kl., Sand 1,666 Kl., blauen Thon 0,333 Kl., weißen groben Sand 0,666 Kl., dürre Erde 0,833 Kl., feine weiche Erde 0,167 Kl., Sand 2,333 Kl., Sand mit Thon 1,333 Kl., Sand mit Conchilien 0,666 Kl., Thon 17 und Sand 5,167 Kl. Wie tief ist dieser Brunnen?

VII.

Ein baierischer Fuß hält 129,38 Duodecimallinien des ehemaligen Pariser Fußes, und ein würtembergischer Längenfuß hält 127 solche Linien; um wie viel übertrifft nun der baierische Schuh den würtembergischen?

VIII.

Die baierische Chaussee-Meile hat 22826,6 Pariser Fuß, eine rußische Meile oder Wersta hält 3288,2 und eine spanische Meile 12882 solche Fuß; welche Differenz findet demnach einerseits zwischen der baierischen, und andererseits zwischen der rußischen und spanischen Meile Statt?

II. Abschnitt.

Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln in Zahlen.

I.

Einige Erklärungen sammt Verfertigung einer Tabelle.

§. 25.

Erklärungen.

a) Wird was immer für eine Zahl zweymal als Factor, somit zugleich als Multiplicand und Multiplicator gesetzt, so nennt man das auf diese Weise erhaltene Producte eine Quadratzahl, ein Quadrat, oder die zweyte Würde (Quadratum, secunda potentia).

Daher sind z. B. die Zahlen 9 „ 16 „ 25 ꝛc. Quadrate oder Quadratzahlen, weil $9 = 3 \times 3$, $16 = 4 \times 4$, $25 = 5 \times 5$ ꝛc.

b) Wird was immer für eine Zahl dreymal als Factor gesetzt, so nennt man das auf diese Weise erhaltene Product eine Kubikzahl, einen Kubus oder die dritte Würde (Cubus, tertia potentia).

Daher sind die Zahlen 8 „ 27 „ 64 ꝛc. Kubikzahlen, oder 8 ist der Kubus von 2, die Zahl 27 ist der Kubus von 3, die Zahl 64 ist der Kubus von 4; weil $8 = 2 \times 2 \times 2$ (I. §. 57.), $27 = 3 \times 3 \times 3$, $64 = 4 \times 4 \times 4$ ꝛc.

c) Quadratwurzel (Radix quadrata) heißt jene Zahl, die zweymal als Factor gesetzt zum Producte die Quadratzahl wieder giebt; daher ist z. B. 2 die Quadratwurzel von 4, die Zahl 3 die Quadratwurzel von 9 ꝛc., weil $2 \times 2 = 4$, und $3 \times 3 = 9$ ꝛc.

d) Kubikwurzel (Radix cubica) heißt jene Zahl, die dreymal als Factor gesetzt, die Kubikzahl — den Kubus wieder giebt; daher ist z. B. 2 die Kubikwurzel von 8, die Zahl 3 die Kubikwurzel von 27 ꝛc.; weil $2 \times 2 \times 2 = 8$, und $3 \times 3 \times 3 = 27$ ꝛc.

e) Eine Zahl zum Quadrate, oder wie man sich auch ausdrückt, zur zweyten Würde oder Potenz erheben, oder was eines ist, quadriren heißt das Quadrat dieser Zahl finden, welches dadurch zum Vorscheine kömmt, daß man die Zahl einmal mit sich selbst multiplicirt.

So wird z. B. 6 zum Quadrate — zur zweyten Potenz erhoben, wenn man 6 mit 6 multiplicirt, und dadurch die Zahl 36 findet.

f) Eine Zahl zum Kubus, oder zur dritten Potenz erheben, oder was eines ist, kubiren heißt jenes Product finden, das man erhält, wenn man die nämliche Zahl dreymal als Factor setzt.

So wird z. B. 5 zum Kubus, oder zur dritten Würde erhoben, wenn man 5 mit 5, und das erhaltene Product 25 abermal mit 5 multiplicirt (I. §. 57.), und dadurch zum Producte die Zahl 125 erhält.

g) Aus einer Zahl die Quadratwurzel aus-

ziehen heißt jene Zahl finden, die zum Quadrate erhoben, die gegebene Quadratzahl wieder giebt.

Finde ich, im Falle z. B. das Quadrat 64 gegeben ist, durch gewiße Veränderungen die Zahl 8, welche zum Quadrate erhoben wieder 64 giebt, so habe ich dadurch aus 64 die Quadratwurzel ausgezogen.

h) Aus einer Zahl die Kubikwurzel ausziehen heißt eine Zahl finden, die zum Kubus erhoben die gegebene Kubikzahl wieder giebt.

Finde ich, im Falle z. B. der Kubus 125 gegeben ist, durch gewiße Veränderungen die Zahl 5, welche zum Kubus erhoben wieder 125 giebt, so habe ich dadurch aus 125 die Kubikwurzel ausgezogen.

i) Das Zeichen der Quadratwurzel besteht in diesem Zeichen $\sqrt{}$, und drückt aus, daß aus jener Zahl, vor welcher es links hingeschrieben wird, die Quadratwurzel ausgezogen werden soll; z. B. $\sqrt{16}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{81}$ rc. d. h., die Quadratwurzel von 16, die Quadratwurzel von 64, die Quadratwurzel von 81 rc.

k) Das Zeichen der Kubikwurzel besteht in diesem Zeichen $\sqrt[3]{}$, und drückt aus, daß aus der Zahl, vor welcher es links hingeschrieben wird, die Kubikwurzel ausgezogen werden soll; z. B. $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{64}$ rc. d. h., die Kubikwurzel von 8, die Kubikwurzel von 64.

§. 26.

Verfertigung der zur Ausziehung der Quadrat- und Kubik-Wurzeln benöthigten Tabelle.

1) Man schreibe in einer horizontalen Linie AB die ersten 9 Zahlen, denen man noch die 3 nächstfolgenden Zahlen beyfügen kann.

2) Man multiplicire jede dieser Zahlen mit sich selbst, und schreibe der Ordnung nach von der Lin-

ken zur Rechten die Producte unter die oben stehenden Zahlen in der Linie CD.

3) Diese Producte multiplicire man der Ordnung nach mit den oben in der Linie AB stehenden Zahlen, und schreibe die neuen Producte von der Linken zur Rechten unter die vorigen in der Linie EF hin.

Man erhält auf diese Weise die verlangte nachstehende Tabelle, wo in der Linie AB die Quadrat- und zugleich Kubikwurzeln, in der Linie CD die Quadrate, und in der Linie EF die Kubikzahlen vorkommen.

Tabelle.

A	Quadrat- u. Kubikwurz.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	B
C	Quadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	D
E	Kubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	F

II.

Aufgaben in Absicht auf die Ausziehung der Quadratwurzeln.

§. 27.

A) Jede gegebene Zahl zum Quadrate oder zur zweyten Potenz zu erheben.

Auflösung:

1) Ist die gegebene Zahl eine von den ersten 12 ganzen Zahlen, so suche man sie in der obersten Reihe AB, man findet gleich unmittelbar unter dieser Zahl in der Linie CD das verlangte Quadrat.

2) Ist aber die gegebene Zahl eine andere ganze oder auch gebrochene Zahl, so multiplicire

man sie mit sich selbst, indem man dieselbe zugleich als Multiplicand und Multiplicator, somit zweymal als Factor setzt, das erhaltene Product giebt das gesuchte Quadrat. (§. 25. e).

Damit man nicht mit Worten schreiben muß „die Zahl soll zum Quadrate erhoben werden", so schreibt man oben rechts die Zahl 2 hin, welche dann dieses ausdrückt, und der Exponent des Quadrates genannt wird.

Die gemeinen Brüche, und die Zahlen, die aus mehreren Theilen bestehen, werden dabey der Deutlichkeit wegen durch diese Zeichen ( ) eingeklammert.

Z. B. 4^2, 6^2, 48^2 rc. heißt das Quadrat von 4, das Quadrat von 6, das Quadrat von 48 rc.

Beyspiele:

a) $9^2 = 81$, weil $9 \times 9 = 81$.

b) $24^2 = 24 \times 24 = 576$.

c) $(5/8)^2 = 5/8 \times 5/8 = 25/64$.

d) $4{,}05^2 = 4{,}05 \times 4{,}05 = 16{,}4025$.

e) $(400 + 35)^2 = 435^2 = 435 \times 435 = 189225$.

I. Zusatz: Gleiche Zahlen geben gleiche Quadrate, weil Gleiches mit Gleichem multiplicirt wieder Gleiches giebt (I. §. 46. I.); z. B. $4 = 4$, also auch $4^2 = 4^2$, oder $16 = 16$.

II. Zusatz: Bey ungleichen Zahlen giebt die größere Zahl das größere, und die kleinere Zahl das kleinere Quadrat (I. §. 46. IV.); z. B. $6 > 5$, also auch $6^2 > 5^2$, oder $36 > 25$.

III. Zusatz: Ein Product wird zum Quadrate erhoben, wenn man jeden Factor dazu erhebt, und die einzelnen Quadrate wieder in ein Product setzt; z. B. $(4 \times 9 \times 2)^2 = 4^2 \times 9^2 \times 2^2 = 16 \times 81$

$\times 4 = 5184$; indem $(4 \times 9 \times 2)^2 = (4 \times 9 \times 2) \times (4 \times 9 \times 2) = 4 \times 9 \times 2 \times 4 \times 9 \times 2 = 4 \times 4 \times 9 \times 9 \times 2 \times 2 = 4^2 \times 9^2 \times 2^2$.

IV. **Zusatz:** Ein Bruch wird zum Quadrate erhoben, wenn man sowohl den Zähler als auch den Nenner zum Quadrate erhebt, und dann das Quadrat des Zählers als Zähler, und das Quadrat des Nenners als Nenner jenes Bruches setzt, der das verlangte Quadrat des gegebenen Bruches ausdrückt; z. B. $(3/7)^2 = \frac{3^2}{7^2} = 9/49$, indem $(3/7)^2 = 3/7 \times 3/7 = \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 7} = 9/49$.

V. **Zusatz:** Das Quadrat eines ächten Bruches (II. §. 3. a.) ist wieder ein ächter Bruch, und das Quadrat eines unächten Bruches, dessen Zähler so groß oder größer als der Nenner ist (II. §. 3. b.), ist wieder ein unächter Bruch der nämlichen Art; z. B. $(4/5)^2 = 16/20$, $(3/3)^2 = 9/9$, und $(8/7)^2 = 64/49$.

§. 28.

B) **Aus einer ganzen Zahl, die nicht mehr als 2 Ziffern hat, die Quadratwurzel auszuziehen.**

Auflösung:

1) Man suche in der Tabelle des vorigen §. in der Linie C D das gegebene Quadrat, findet man dasselbe, so steht in senkrechter Richtung oben in der Linie A B die verlangte Quadratwurzel, d. h., jene Zahl, die mit sich selbst multiplicirt — zweymal als Factor gesetzt das gegebene Quadrat wieder giebt.

2) Ist aber die gegebene Zahl keine genaue

Quadratzahl, d. h., keine solche Zahl, die man dadurch erhält, daß man eine andere Zahl mit sich selbst multiplicirt, so suche man dessen ungeachtet dieselbe in der Linie CD der Tabelle, nehme von der nächstkleineren in der Tabelle vorkommenden Zahl die oben stehende Quadratwurzel, und bemerke sich einsweilen den Rest, der sich dadurch ergiebt, daß man das Quadrat der angenommenen Wurzel von dem gegebenen Quadrate subtrahirt.

Wie, im Falle ein Rest bleibt, die Quadratwurzel durch Annäherung ausgezogen wird, wird späterhin gezeigt werden.

I. Beyspiel:

Es soll aus 64 die Quadratwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

Man suche in der Linie CD der Tabelle; man findet die Zahl 64, weßwegen die obenstehende Zahl 8 die verlangte Quadratwurzel ist.

II. Beyspiel:

Aus 55 soll die Quadratwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

1) Sucht man in der Linie CD der Tabelle, so findet man 55 nicht, wohl aber liegt 55 zwischen 49 und 64; um deswillen nehme man von 49 als dem nächstkleineren in der Tabelle vorkommenden Quadrate die Quadratwurzel 7.

2) Die Wurzel 7 erhebe man zum Quadrate, und ziehe dieses von 55 ab, man erhält 6 zum Reste, indem $55 - 7^2 = 55 - 49 = 6$.

§. 29.

C) Aus einer ganzen Zahl, die Quadratwurzel auszuziehen, es mag die gegebene Zahl aus wie immer vielen Ziffern bestehen.

Auflösung:

1) Man theile die Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen, die man mittels gezogener Striche bezeichnet, und gebe jeder Klasse 2 Ziffern, mit Ausnahme der linksstehenden Klasse, die auch, wenn nicht mehr 2 Ziffern vorhanden sind, ein Ziffer haben darf.

Die Wurzel bekömmt dann allezeit so viele Stellen oder Ziffern, als solche Klassen vorhanden sind.

2) Nach Vorschrift des vorigen §. ziehe man aus der ersten linksstehenden Klasse die Quadratwurzel aus, schreibe diese rechts nach dem am Ende der Quadratzahl gezogenen Verticalstriche; erhebe sie zum Quadrate, und ziehe dieses von der ersten Klasse ab, wobey dasselbe so angeschrieben wird, daß das letzte Ziffer des Quadrates unter das letzte Ziffer der ersten Klasse (von der Linken zur Rechten gezählet) zu stehen kömmt.

3) Zum Reste, im Falle sich einer ergiebt, setze man rechts die nächste Klasse hin, und bezeichne sich die herabgesetzte Klasse etwa durch einen unten gezogenen Strich. Ferner nehme man den ersten Wurzeltheil doppelt, indem man ihn mit 2 multiplicirt, und setze ihn so als Divisor unter den Rest und die heruntergesetzte Klasse, daß das letzte Ziffer desselben unter das erste Ziffer der herabgesetzten zweyten Klasse zu stehen kömmt.

4) Nun dividire man nach den bey der Division ganzer Zahlen aufgestellten Regeln, setze den gefundenen Quotienten als den zweyten Wurzeltheil sowohl rechts neben den ersten Wurzeltheil, als auch neben den Divisor hin.

5) Den Divisor sammt dem beygesetzten zweyten Wurzeltheile multiplicire man mit dem so eben gefundenen Quotienten, welcher der zweyte Wurzeltheil ist, und subtrahire das Product von dem vorigen Reste und der beygesetzten zweyten Klasse.

6) Zum jetzigen Reste, der etwa zum Vorscheine kömmt, setze man die nächstfolgende dritte Klasse herab, nehme das Zweyfache der beiden bekannten Wurzeltheile, die man zusammen wie eine Zahl betrachtet, und verfahre wieder auf die eben angegebene Weise.

7) Hat die gegebene Quadratzahl mehr als 3 Klassen, so setze man zum Reste wieder die nächste Klasse herunter, und wiederhole dann dieses Verfahren so lange, bis alle Klassen heruntergesetzt, und somit alle Wurzeltheile gefunden worden sind.

8) Kann man einmal mit dem Zweyfachen der Wurzeltheile nicht dividiren, so schreibe man Null als den gesuchten Wurzeltheil, setze die folgende Klasse herunter, nehme die jetzigen Wurzeltheile, die man zusammen wie eine Zahl betrachtet, doppelt, und dividire damit auf die vorige Weise, während das letzte Ziffer vom Zweyfachen der Wurzeltheile unter das erste Ziffer der zuletzt herabgesetzten Klasse geschrieben wird.

9) Würde einmal ein Product so groß seyn, daß man nicht subtrahiren kann, so muß der Quotient, vielmehr Wurzeltheil, kleiner genommen

werden, damit die Subtraction vorgenommen werden kann.

I. Beyspiel:

Es soll aus 119716 die Quadratwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

1) Man theile diese Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen, man erhält 3 Klassen, weßhalb die Wurzel 3 Ziffern bekömmt, und ziehe rechts einen Verticalstrich, oder mache dagegen dieses Zeichen „{“: die gegebene Quadratzahl, oder das Quadrat 11|97|16{

2) Aus 11 ziehe man mittels der Tabelle die Quadratwurzel aus, und schreibe sie rechts nach dem Verticalstriche; den gefundenen ersten Wurzeltheil 3 erhebe man zum Quadrate, ziehe dieses von der ersten Klasse ab, und setze zum Reste die nächste Klasse:

das gegebene Quadrat	11|97|16{3
das Quadrat des ersten Theiles	9
der Rest mit der nächsten Klasse	297

3) Den ersten Wurzeltheil 3 nehme man doppelt, es ist $3 \times 2 = 6$, und setze 6 als Divisor unter das erste Ziffer der zweyten Klasse, somit unter 9; ferner dividire man 29 mit 6, und schreibe den Quotienten 4 als den zweyten Wurzeltheil neben den ersten Wurzeltheil und zugleich neben den Divisor zur rechten Seite hin; dann multiplicire man 64 mit 4, subtrahire das Product 256 von 297, und setze zum Reste die letzte Klasse:

	11|97|16{34
	9
	297
der Divisor mit dem zweyten Wurzeltheile	64
das Product	256
der Rest mit der letzten Klasse	4116

4) Man betrachte die beiden ersten Wurzeltheile als eine Zahl, und nehme 34 doppelt, es ist 34 × 2 = 68, und setze 68 so unter den Rest, und die beygefügte letzte Klasse, daß 8 unter das erste Ziffer dieser Klasse zu stehen kömmt; ferner dividire man 41 mit 6, und schreibe den Quotienten 6 als den dritten und letzten Wurzeltheil neben die beiden vorigen Wurzeltheile und zugleich neben den Divisor; dann multiplicire man 686 mit 6, und subtrahire das Product 4116 von 4116, der Rest ist Null, auch ist im Quadrate keine Klasse mehr zum Heruntersetzen vorhanden, um deswillen hat man jetzt die ganze Wurzel gefunden:

	11|97|16 ⟨ 346
	9
	297
	64
	256
	4116
der Divisor mit dem letzten Wurzeltheile	686
das Product	4116

Daher ist $\sqrt{119716} = 346$.

II. Beyspiel:

Es soll aus 81'144.064 die Quadratwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

1) Man theile die Zahl in Klassen, und ziehe rechts einen Verticalstrich:

das gegebene Quadrat 81|14|40|64⟨

2) Mittels der Tabelle ziehe man aus der ersten Klasse die Wurzel aus, setze diese rechts neben den Verticalstrich, erhebe sie zum Quadrate, ziehe dieses von der ersten Klasse ab, und setze zum Reste, der hier Null ist, die nächste Klasse herunter:

	81|14|40|64⟨9
das Quadrat des ersten Theiles	81
der Rest mit der zweyten Klasse	14

3) Den ersten Wurzeltheil 9 nehme man doppelt, und setze ihn als Divisor unter das erste linksstehende Ziffer der herabgesetzten Klasse, somit 8 als das letzte Ziffer von 18 unter 1; man kann nicht dividiren, daher setze man Null als den zweyten Wurzeltheil, und setze zur zweyten Klasse die dritte Klasse herunter:

	81|14|40|64⟨90
	81
	14
das Duplum des ersten Theiles	18
der Rest mit der dritten Klasse	1440

4) Man nehme die beiden ersten Wurzeltheile, somit 90 doppelt, und setze davon das letzte Ziffer, an dessen Stelle hier Null steht, unter das erste Ziffer der dritten Klasse; man kann abermal nicht dividiren, indem 180 größer ist als 144, daher setze man Null als den dritten Wurzeltheil, und schreibe zu den vorhandenen Ziffern die nächste Klasse herunter:

	81|14|40|64⟨900
	81
	1440
als Divis. d. beiden ersten Wurzeltheile	180
der Rest mit der letzten Klasse	144064

5) Nun nehme man die drey ersten Wurzeltheile, somit 900 doppelt, man erhält 1800, und schreibe dieses Duplum so als Divisor an, daß das letzte Ziffer davon unter das erste Ziffer der vierten und letzten Klasse zu stehen kömmt; ferner dividire man, und setze den Quotienten 8 als den vierten Wurzeltheil zu den

vorigen Wurzeltheilen, und zum Divisor hin, multiplicire dann, und subtrahire auf die vorige Weise:

```
 81|14|40|64 { 9008
     |  |  |
 81
 ---
    14
 18
 ------
    1440
    180
 ---------
    144064
d. Divisor mit dem 4ten Wurzeltheile   18008
das Product                           144064
                                      ------
```

Weil hier kein Rest vorhanden ist, und auch keine Klasse mehr zum Heruntersetzen da ist, so ist nun die Wurzel ganz gefunden

Daher ist $\sqrt{81'144.064} = 9008.$

§. 30.

D) Aus einer ganzen Zahl, welche kein vollkommenes oder genaues Quadrat ist, die Wurzel durch Annäherung zu bestimmen.

Auflösung:

Wenn bey Ausziehung der Wurzel aus einer ganzen Zahl zuletzt, wenn keine Klasse mehr zum Heruntersetzen vorhanden ist, ein Rest bleibt, so läßt sich für ein solches Quadrat die Wurzel nie genau finden, indem es dann keine Zahl — weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl giebt, die mit sich selbst multiplicirt das Quadrat wieder giebt. Wohl aber kann man mittels der Decimalen durch Annäherung (per approximationem) die Wurzel so genau bestimmen, als es nur immer die vorliegende Aufgabe erfodert,

damit das noch Fehlende als verschwindend betrachtet werden kann.

Eine solche Quadratzahl nennt man dann ein unvollständiges — unvollkommenes Quadrat, und die diesem unvollkommenen Quadrate entsprechende Wurzel eine Irrationalzahl, d. h., eine solche Zahl, die weder durch eine ganze, noch eine gebrochene Zahl vollständig dargestellt werden kann.

Die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl durch Annäherung geschieht auf folgende Weise:

1) Nach Vorschrift des §. 29. ziehe man die Quadratwurzel aus, bis man alle Klassen herunter gesetzt hat.

2) Nun setze man zum letzten Reste zwey Nullen zur rechten Seite hin, und verfahre auf die vorige Weise.

3) Zum jetzigen Reste setze man wieder zwey Nullen, und setze dieses Verfahren, indem immerhin ein Rest bleibt, so lange fort, als man es für nöthig erachtet, um für die vorliegende Aufgabe mit der gehörigen Genauigkeit die verlangte Wurzel zu finden.

4) So viel Paare von Nullen, um gleichsam die fehlenden Klassen zu ergänzen, den Resten beygesetzt worden sind, eben so viele Decimalen schneide man in der Wurzel von der Rechten zur Linken ab, oder was eines ist, man mache bey Ausziehung der Wurzel, wie ein Rest bleibt, und keine Klasse zum Heruntersetzen mehr vorhanden ist, ein Comma, und verfahre dann auf die angegebene Weise.

Die links vor dem Comma stehenden Ziffern machen die ganze Zahl, und die nach demselben folgenden Ziffern die Decimalen aus.

Auf dieses in der Wurzel nach den Ganzen gesetzte Comma wird dann beym wirklichen Ausziehen der Wurzel keine fernere Rücksicht genommen.

I. Beyspiel:

Es soll aus 3 die Quadratwurzel durch Annäherung ausgezogen, und dieselbe bis auf 7 Decimalstellen bestimmt werden.

Auflösung:

```
    3 ( 1,7320508 .....
    1
    ───
1)  200
     27
    189
    ─────
2)   1100
      343
     1029
    ───────
3)     7100
       3462
       6924
    ────────
4)      17600
        3464
    ──────────
5)      1760000
         346405
        1732025
    ─────────────
6)         2797500
           346410
    ──────────────
7)         279750000
            34641008
           277128064
    ──────────────
             2621936
```

Weil man, wie es aus den herablaufenden Nummern ersichtlich ist, 7 Paare von Nullen beysetzte, so müssen auch, was bereits geschehen ist, von der Rechten zur Linken sieben Decimalstellen abgeschnitten werden.

Daher ist nun die durch Annäherung gefundene Quadratwurzel von 3 die Irrationalzahl 1,7320508.... oder $\sqrt{3} = 1,7320508....$

II. Beyspiel:

Es soll aus 131 die Quadratwurzel durch Annäherung bis auf eine beliebige Anzahl von Decimalstellen ausgezogen werden.

Auflösung:

```
   1|31{11,44552......
   1 |
     ____
     31
     21
     21
     ____
1)   1000
      224
      896
     _____
2)   10400
      2284
      9136
     ______
3)   126400
      22885
     114425
     _______
4)   1197500
      228905
     1144525
     ________
5)    5297500
      2289102
      4578204
     ________
       719296
```

Weil man 5 Paare von Nullen beysetzte, so ist nun $\sqrt{131} = 11,44552.....$

I. Zusatz: So oft bey Ausziehung der Quadratwurzel zuletzt, wo nämlich zum Heruntersetzen keine Klasse mehr vorhanden ist, ein Rest bleibt, so ist die Wurzel allezeit eine Irrationalzahl, welche nur durch Annäherung bestimmt werden kann. Ob demnach aus

einer ganzen Zahl die Wurzel durch Annäherung bestimmt werden muß oder nicht, kann erst dann erkannt werden, wenn man die ganze Zahl der Wurzel gefunden hat, und man also daraus ersieht, ob zuletzt noch ein Rest bleibt oder nicht.

II. Zusatz: So oft das Quadrat des ersten Wurzeltheiles, oder überhaupt das jedesmalige Product abgezogen werden kann, und somit entweder ein Rest bleibt oder derselbe Null ist, so sind die einzelnen Wurzeltheile nicht zu groß genommen worden, gleichwie die ganze gefundene Wurzel nicht zu groß ist, wenn ihr Quadrat nicht größer ist, als die gegebene Quadratzahl, aus welcher die Wurzel ausgezogen worden ist.

Wenn zuletzt kein Rest bleibt, oder der gebliebene Rest kleiner ist, als jene Summe, die man erhält, wenn man zum Zweyfachen der Wurzel (zum Duplum derselben) noch die Zahl 1 addirt, so ist auch die gefundene Quadratwurzel nicht zu klein.

Daher ist z. B. 8 als die Quadratwurzel von 49 zu groß, weil $8^2 = 64$, und 64 größer ist als 49, folglich nach den Regeln der gemeinen Arithmetik 64 von 49 nicht abgezogen werden kann. Dagegen ist 7 die wahre Wurzel, weil $7^2 = 49$, und $49 - 49 = 0$.

Sollte aus 75 die Quadratwurzel ausgezogen werden, so wäre die angenommene Wurzel 7 zu klein, weil $7 \times 7 = 49$, dann $75 - 49 = 26$, und der Rest 26 nicht kleiner ist $15 = 2 \times 7 + 1$, d. h., als das Zweyfache der Wurzel plus 1.

Auf diese Weise kann man also jederzeit bestimmt wissen, ob die gefundene Wurzel nicht zu klein oder zu groß, mithin ob sie die wahre Wurzel ist, welche wirklich gefunden werden soll.

§. 31.

E) Aus einem Decimalbruche die Qudratwurzel auszuziehen.

Auflösung:

Alle Zahlen, welche mit 2 ohne Rest dividirt werden können, sind **gerade Zahlen**, z. B. 2 „ 4 „ 68 „ 128; jene Zahlen aber, die man nicht mit 2 ohne Rest dividiren kann, sind **ungerade Zahlen**, z. B. 15 „ 29 „ 131 ꝛc.

Ist nun aus einem gemischten oder ungemischten Decimalbruche die Quadratwurzel auszuziehen, so verfahre man auf folgende Weise:

a) Wenn die Anzahl der vorkommenden Decimalstellen eine gerade Zahl ist, so betrachte man alle vorkommenden Ziffern zusammen wie eine ganze Zahl, und ziehe nach §. 29. die Quadratwurzel aus.

Kommen im gegebenen Decimalbruche keine Ganzen vor, so bekömmt auch die Wurzel keine Ganzen, und somit sind alle gefundenen Ziffern Decimalen.

Kommen aber in demselben Ganze vor, so drücken die links stehenden Ziffern der Wurzel wieder eine ganze Zahl mit so vielen Ziffern aus, als Klassen die ganze Zahl des gegebenen Bruches enthält; die übrigen Ziffern von der Linken zur Rechten sind dann die Decimalen.

b) Wenn aber die Anzahl der Decimalen ungerade ist, so setze man rechts den Decimalen eine Null bey, es wird dadurch ihr Werth nicht verändert (§. 4. A.), und verfahre dann auf die so eben angegebene Weise.

In diesen beiden Fällen kann man gleich während der Ausziehung der Wurzel das Comma auf die gehörige Weise machen.

Kommen nämlich im Decimalbruche keine Ganzen vor, so schreibt man gleich in der Wurzel, die dann auch keine Ganzen enthält, Null und das Comma (0,), die folgenden Ziffern sind dann Decimalen.

Kommen Ganze vor, so macht man das Comma, wie die Klassen der ganzen Zahl aufhören, die übrigen von der Linken zur Rechten folgenden Ziffern sind dann die Decimalen.

I. Beyspiel:

Es soll aus 0,000025 die Quadratwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

1) Die Anzahl der hier vorkommenden Decimalen ist eine gerade Zahl, daher betrachte man die vorkommenden Ziffern wie eine ganze Zahl, und ziehe somit aus 25 die Quadratwurzel aus, man erhält 5, indem $\sqrt{25} = 5$.

Weil aber die sechs Decimalen drey Klassen geben, so muß auch die Wurzel drey Ziffern haben; um deswillen setze man zur Linken noch zwey Nullen hin, man erhält als die verlangte Wurzel 0,005.

2) Oder man schreibe gleich eine Null und das Comma, und ziehe auf die bekannte Weise die Wurzel aus. Die beiden ersten Wurzeltheile sind Null, weil die zwey ersten Klassen aus bloßen Nullen bestehen, und die dritte Klasse 25 giebt den dritten Wurzeltheil 5.

Daher ist $\sqrt{0,000025} = 0,005$.

II. Beyspiel:

Es soll aus 256,3 die Quadratwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

Die Anzahl der Decimalen ist hier eine ungerade Zahl, daher setze man noch eine Null hin, es ist 256,3 = 256,30 und daher auch $\sqrt{256,3} = \sqrt{256,30}$.

2) Weil hier zuletzt ein Rest bleibt, so wird die Wurzel nach Vorschrift des §. 30. durch Annäherung etwa bis auf drey Decimalen bestimmt.

Daher ist $\sqrt{256,3} = 16,009 \ldots\ldots$

III. Beyspiel:

Es soll aus 3303,9504 die Quadratwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

1) Man betrachte die vorkommenden Ziffern wie eine ganze Zahl, und ziehe die Wurzel aus, es ist $\sqrt{33039504} = 5748$.

2) Weil die ganze Zahl 2 Klassen und die Decimalen auch 2 Klassen ausmachen, so bekömmt die Wurzel 2 Decimalen, und die ganze Zahl derselben 2 Ziffern.

Daher ist $\sqrt{3303,9504} = 57,48$.

§. 32.

F) Aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung:

Die Wurzel eines gemeinen Bruches ist wieder ein Bruch, dessen Zähler die Wurzel des Zählers, und dessen Nenner die Wurzel des Nenners des gegebenen Bruches ist. So ist z. B. der Bruch $^4/_5$ die Quadratwurzel von $^{16}/_{25}$, oder $\sqrt{^{16}/_{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$, und $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = {^4/_5}$, daher ist $\sqrt{^{16}/_{25}} = {^4/_5}$.

Weil sich aber öfters der Fall ergiebt, daß die Zähler und Nenner der gemeinen Brüche keine vollkommenen Quadrate sind, so beobachte man, um in jedem vorkommenden Falle die Quadratwurzel zu finden, nachstehende Regeln:

1) Ist der gegebene Bruch ein gemischter Bruch, so richte man denselben ein (II. §. 28.),

und ziehe dann allererst den aufgestellten Regeln gemäß aus dem Nenner des gegebenen Bruches die Quadratwurzel aus, um zu sehen, ob zuletzt noch eine Rest bleibt, und also daraus zu erkennen, ob der Nenner ein vollkommenes Quadrat ist oder nicht.

2) Bleibt kein Rest, und ist somit der Nenner ein genaues — vollständiges Quadrat, so ziehe man auch aus dem Zähler des gemeinen Bruches die Quadratwurzel aus.

Bleibt zuletzt kein Rest, so ist auch der Zähler des Bruches ein vollständiges Quadrat.

3) Die Wurzel des Zählers nehme man als Zähler, und die Wurzel des Nenners nehme man als Nenner jenes Bruches, der die verlangte Quadratwurzel des gegebenen Bruches ausdrückt.

4) Ist der Nenner ein unvollständiges Quadrat, so ziehe man nur aus dem Zähler, den man vorhin mit dem Nenner des gegebenen Bruches multiplicirt, entweder nach §. 29., oder, im Falle zuletzt ein Rest bleibt, nach Vorschrift des §. 30. mittels der Annäherung die Quadratwurzel bis auf so viele Decimalstellen aus, als es die vorliegende Aufgabe erfodert.

5) Die auf diese Weise gefundene Wurzel des Zählers setze man als Zähler, und den unveränderten Nenner des gegebenen gemeinen Bruches als Nenner jenes Bruches, der die verlangte Quadratwurzel ausdrückt.

6) In diesem letzteren Falle dividire man nach den bey den Decimalbrüchen aufgestellten Regeln der Division den Zähler der Wurzel mit dem Nenner, welcher eine ganze Zahl ist, und man er-

hält die gesuchte Wurzel in der Gestalt eines Decimalbruches.

7) Zusammengesetzte oder gebrochene Brüche müssen in einfache Brüche verwandelt werden (II. §. 42.), damit man aus denselben die Quadratwurzel ausziehen kann.

Aus einem gemeinen Bruche kann die Quadratwurzel auch nach dieser Regel ausgezogen werden:

1) Man verändere den gemeinen Bruch, wenn es angeht, in einen endlichen, oder, im Falle dieses nicht geschehen kann, nach Vorschrift des §. 7. in einen unendlichen Decimalbruch mit so vielen Decimalstellen, als nöthig sind, um die gesuchte Wurzel mit der gehörigen Genauigkeit zu erhalten. Soll z. B. die Quadratwurzel bis auf 4 Decimalstellen bestimmt werden, so muß man dann den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch von 8 Decimalstellen verwandeln.

2) Aus dem Decimalbruche ziehe man nach §. 31. die Quadratwurzel aus, und man hat dadurch die verlangte Wurzel des gegebenen gemeinen Bruches gefunden.

I. Beyspiel:

Es soll aus $^9/_{16}$ die Quadratwurzel ausgezogen werden.

I. Auflösung:

1) Man ziehe aus 16 die Quadratwurzel aus, man erhält 4, oder $\sqrt{16} = 4$.

2) Man ziehe aus 9 die Quadratwurzel aus, man erhält 3, oder $\sqrt{9} = 3$.

3) Die Wurzel des Zählers setze man als Zähler, und die Wurzel des Nenners als Nenner jenes Bruches, der die verlangte Quadratwurzel ausdrückt.

Daher ist $\sqrt{^9/_{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = {^3/_4}$.

II. Auflösung:

1) Man verwandle den Bruch $9/16$ in einen Decimalbruch, man erhält 0,5625, oder $9/16 = 0{,}5625$.

2) Man ziehe aus dem Decimalbruche die Quadratwurzel aus, man erhält 0,75 oder $\sqrt{0{,}5625} = 0{,}75$.

3) Wenn es die Aufgabe erfodert, so verwandle man diesen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch, man erhält als die gefundene Wurzel $3/4$, oder 0,75.

Daher ist $\sqrt{9/16} = \sqrt{0{,}5625} = 0{,}75 = 3/4$.

II. Beyspiel:

Es soll aus $19/64$ die Quadratwurzel ausgezogen werden.

I. Auflösung:

1) Man ziehe aus 64 die Quadratwurzel aus, man erhält 8, indem $\sqrt{64} = 8$.

2) Man ziehe aus 19 die Quadratwurzel durch Annäherung etwa bis auf drey Decimalstellen aus, weil 19 ein unvollständiges Quadrat ist, man erhält 4,358 ..., indem $\sqrt{19} = 4{,}358 \ldots$

3) Weil die Wurzel aus 19 als Zähler, und die Wurzel aus 64 als Nenner jenes Bruches gesetzt werden muß, welcher die verlangte Wurzel ausdrückt, so dividire man 4,358 ... mit 8 (II. §. 5. Zus. V.), man erhält 0,544 ....

Daher ist $\sqrt{19/64} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{19}}{8} = \frac{4{,}358\ldots}{8} = 0{,}544 \ldots$

II. Auflösung:

1) Man verwandle den gemeinen Bruch $19/64$ in den Decimalbruch 0,296875, und ziehe aus diesem letzteren die Quadratwurzel aus, man erhält 0,544 ..., indem $\sqrt{0{,}296875} = 0{,}544 \ldots$

Daher ist $\sqrt{19/64} = \sqrt{0{,}296875} = 0{,}544 \ldots$

III. Beyspiel:

Man ziehe aus $5/7$ die Quadratwurzel aus.

I. Auflösung:

1) Zieht man aus 7 die Quadratwurzel aus, so bleibt ein Rest, daher ist 7 ein unvollständiges Quadrat. Man multiplicire also mit 7 den Zähler 5, man erhält 35.

2) Aus dieser Zahl ziehe man durch Annäherung, indem sie ebenfalls ein unvollkommenes Quadrat ist, die Quadratwurzel aus, man erhält 5,916 ...., indem $\sqrt{35} = 5{,}916\ldots..$

3) Diese Quadratwurzel 5,916... dividire man mit dem unveränderten Nenner 7, man erhält 0,845...

Daher ist $\sqrt{5/7} = 0{,}845\ldots.$

Eigentlich sollte man auch den Nenner 7 mit 7 multipliciren, weil man den Zähler 5 mit dieser Zahl multiplicirte, indem dadurch der Werth des Bruches unverändert bleibt (II. §. 7.), und dann aus dem Producte ebenfalls die Quadratwurzel ausziehen; es ist aber $7 \times 7 = 49$, und $\sqrt{49} = 7$; aus diesem Grunde läßt man in dem vorliegenden Falle den Nenner des gegebenen gemeinen Bruches unverändert, und verfährt dann auf die angegebene Weise.

II. Auflösung:

1) Man verwandle durch Annäherung den gemeinen Bruch $5/7$ in den Decimalbruch 0,714285....

2) Aus diesem Decimalbruche ziehe man die Quadratwurzel aus, man erhält 0,845...., indem $\sqrt{0{,}714285\ldots} = 0{,}845\ldots.$

3) Daher ist die Zahl 0,845... die gesuchte Quadratwurzel des gemeinen Bruches $5/7$, oder $\sqrt{5/7} = \sqrt{0{,}714285\ldots} = 0{,}845\ldots.$

§. 33.

Die Probe in Absicht auf die Ausziehung der Quadratwurzel.

a) Ist bey Ausziehung einer Quadratwurzel am Ende kein Rest geblieben, und somit die gefundene Wurzel eine Rationalzahl, so erhebe man diese nach §. 27. zum Quadrate, man muß, im

Fal-

Falle die Rechnung richtig ist, das anfangs gegebene Quadrat wieder erhalten.

b) Ist bey Ausziehung der Quadratwurzel zuletzt ein Rest geblieben, und dieselbe durch Annäherung bis auf eine gewiße Anzahl von Decimalstellen bestimmt worden, so erhebe man den Decimalbruch wieder zum Quadrate, und addire zu diesem den zuletzt gebliebenen Rest, man muß wieder die gegebene Quadratzahl erhalten.

I. Beyspiel zu a.

Im I. Beyspiele des §. 29. hat man die Zahl 346 zur Wurzel erhalten.

Erhebt man 346 zum Quadrate, so erhält man wieder das gegebene Quadrat 119716, indem 346 × 346 = 119716; um deswillen ist die Zahl 346 wirklich die gesuchte Quadratwurzel zu 119716 (§. 25. g.).

II. Beyspiel zu a.

Im II. Beyspiele des nämlichen §. 29. hat man zur Wurzel die Zahl 9008 gefunden.

Man erhebe diese Zahl zum Quadrate, man erhält wieder 81'144.064, indem 9008 × 9008 = 81'144.064; deßwegen ist die Zahl 9008 wirklich die gesuchte Quadratwurzel zu 81'144.064.

III. Beyspiel zu a.

Im I. Beyspiele des §. 32. hat man den Bruch $\frac{3}{4}$ zur Wurzel erhalten.

Man erhebe nun $\frac{3}{4}$ zum Quadrate, man erhält wieder $\frac{9}{16}$, indem $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$; daher ist $\frac{3}{4}$ wirklich die verlangte Quadratwurzel.

I. Beyspiel zu b.

Im I. Beyspiele des §. 30. hat man durch Annäherung als Wurzel die Zahl 1,7320508 . . . erhalten.

Man erhebe nun diese Wurzel wieder zum Quadrate, es ist 1,7320508 × 1,7320508 = 2,99999997378064, und addire dazu den zuletzt gebliebenen Rest 0,0000002621936, indem man vorhin das letzte Ziffer desselben zur rechten Seite und das letzte Ziffer des vorstehenden Productes, wie auch die übrigen Ziffern von der Rechten zur Linken der Ordnung nach unter einander geschrieben hat, man erhält zur Summe die Zahl 3,00000000000000.

Die Nullen allein nach dem Comma haben ohne ein Zahlziffer keinen Werth, man verwandle also diesen gemischten Decimalbruch in eine ganze Zahl, indem man diese 14 Nullen, die man beym Ausziehen der Wurzel anstatt der folgenden 7 Klassen beysetzte, wegläßt, wodurch der Werth dieser Zahl keineswegs verändert wird (§. 6.).

Weil man auf diese Weise den gegebenen Kubus von 3 wieder gefunden hat, so ist die Zahl 1,7320508 .... wirklich die durch Annäherung bestimmte Wurzel von 3.

II. Beyspiel zu b.

Im II. Beyspiele des §. 32. hat man die Zahl 0,544 ... als die Wurzel in Gemäßheit der ersten Auflösung gefunden, indem man die Wurzel des Zählers mit der Wurzel des Nenners dividirte.

Als Wurzel des Zählers des gegebenen Bruches ist die Zahl 4,358 ..., und als Wurzel des Nenners ist die Zahl 8 gefunden worden.

Nun ist aber 4,358 × 4,358 = 18,992164; addirt man dazu den zuletzt gebliebenen Rest 0,007836, den man auf die vorhin angezeigte Weise unter dieses Product setzt, so erhält man 19,000000 = 19.

Ferner 8 × 8 = 64; wenn man also den Zähler zum Quadrate erhebt, und den Rest dazu addirt, so erhält man wieder 19, erhebt man den Nenner 8 zu dieser Würde, so erhält man abermal 64, daher

ist die Zahl $\frac{4,358\ldots}{8}$ = 0,544.... wirklich die verlangte Wurzel des Bruches 19/64.

Bey der II. Auflösung dieses Beyspieles hat man den Bruch 19/64 in den endlichen Decimalbruch 0,296875 verwandelt, und aus diesem Decimalbruche die Quadratwurzel ausgezogen.

Zur Probe erhebe man die gefundene Wurzel 0,544 ... zum Quadrate und addire den zuletzt gebliebenen Rest 0,000939 auf die angegebene Weise dazu, man erhält wieder 0,296875.

Diesen endlichen Decimalbruch verwandle man nach §. 9. in einen gemeinen Bruch, indem man den Zähler und Nenner mit dem größten gemeinen Maaße 15625 dividirt, und man erhält wieder den Bruch 19/64, indem 0,296875 = 296875/1000000 = $\frac{296875 : 15625}{1000000 : 15625}$ = 19/64.

Daraus sieht man von selbst ein, wie die Sache anzugehen ist, wenn man beym III. Beyspiele des §. 32. die Probe machen will.

III.

Aufgaben in Absicht auf die Ausziehung der Kubikwurzeln in Zahlen.

§. 34.

A) Jede gegebene Zahl zum Kubus zu erheben.

Auflösung:

1) Ist die gegebene Zahl eine von den ersten 12 ganzen Zahlen, so suche man sie in der Linie AB der Tabelle des §. 26., man findet in einer

senkrechten Richtung unten in der Linie EF den verlangten Kubus.

2) Ist die gegebene Zahl eine andere ganze oder gebrochene Zahl, so erhebe man sie nach Vorschrift des §. 27. zum Quadrate.

3) Dieses Quadrat multiplicire man mit der gegebenen Zahl, das dadurch erhaltene Product giebt den verlangten Kubus.

I. Beyspiel:

Es sey 8 zum Kubus zu erheben.

Auflösung:

Man suche in der Linie AB der Tabelle die Zahl 8, man findet in senkrechter Richtung unten die verlangten Kubus 512.

Anstatt daß man 8 dreymal als Factor setzt, schreibt man kürzer 8 einmal mit der oben rechts beygesetzten Zahl 3, welche der Exponent des Kubus — der dritten Würde genannt wird, und ausdrückt, daß 8 zum Kubus erhoben werden soll; daher ist $8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$.

II. Beyspiel:

Es sey 314 zum Kubus zu erheben.

Auflösung:

1) Man erhebe 314 zum Quadrate, man erhält 98596, indem $314 \times 314 = 98596$.

2) Das Quadrat multiplicire man mit der gegebenen Zahl, man erhält zum Producte den verlangten Kubus 30'959.144, daher ist $314 \times 314 \times 314 = 30'959.144$, d. h., $314^3 = 30'959.144$.

III. Beyspiel:

Es soll 0,04 zum Kubus erhoben werden.

Auflösung:

1) Man erhebe 0,04 zum Quadrate, man erhält 0,0016.

2) Das Quadrat multiplicire man mit der gegebenen Zahl, man erhält zum Producte die Zahl 0,000064; daher ist $0{,}04^3 = 0{,}000064$.

IV. Beyspiel:

Es soll $\frac{3}{4}$ zum Kubus erhoben werden.

Auflösung:

1) Man erhebe $\frac{3}{4}$ zum Quadrate, man erhält $\frac{9}{16}$, da $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.

2) Das Quadrat $\frac{9}{16}$ multiplicire man mit $\frac{3}{4}$, man erhält $\frac{27}{64}$, indem $\frac{9}{16} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$.

Daher ist $(\frac{3}{4})^3 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$, oder $(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$.

I. Zusatz: Gleiche Zahlen geben zum Kubus erhoben gleiche Kubikzahlen; indem die Quadrate gleicher Zahlen gleich sind (§. 27. Zus. I.), und diese, um den Kubus zu erhalten, wieder mit den gegebenen Zahlen multiplicirt werden. Wie also z. B. $2 = 2$, so ist auch $2^3 = 2^3$, oder $8 = 8$.

II. Zusatz; Bey ungleichen Zahlen giebt die größere Zahl den größeren Kubus, und somit die kleinere den kleineren Kubus. Wie z. B. $4 < 5$, so ist auch $4^3 < 5^3$, oder $64 < 125$.

III. Zusatz: Ein Product wird zum Kubus erhoben, wenn man jeden Factor dazu erhebt, und dann die Kubus der Factoren wieder zusammen in ein Product setzt. Es ist daher $(2 \times 7)^3 = 2^3 \times 7^3 = 8 \times 343 = 2744$, und 14 zum Kubus erhoben, da $2 \times 7 = 14$, giebt ebenfalls 2744.

IV. Zusatz: Ein Bruch wird zum Kubus erhoben, wenn man den Zähler und Nenner zum Kubus erhebt, dann den Kubus des Zählers als Zähler und den Kubus des Nenners als Nenner jenes Bruches setzt, der den verlangten Kubus des gegebenen Bruches ausdrückt.

Die Decimalbrüche erhebt man wie ganze Zahlen nach der bey denselben aufgestellten Multiplicationsregel zum Kubus.

Daher ist z. B. $(4/7)^3 = \frac{4^3}{7^3} = 64/343$.

V. Zusatz: Der Kubus eines ächten Bruches ist ein ächter Bruch, und der Kubus eines unächten Bruches, dessen Zähler so groß oder größer ist, als der Nenner, ist wieder ein solcher unächter Bruch.

Daher ist z. B. $(5/9)^3 = 125/729$, $(7/7)^3 = 343/343$, $(6/5)^3 = 216/125$ ꝛc.

VI. Zusatz: Aus dem Gesagten geht hervor, daß bey gleichen Zahlen die Quadrat- und Kubikwurzeln gleich sind, bey ungleichen Zahlen aber entspricht der größeren Zahl die größere Quadrat- und Kubikwurzel, und der kleineren die kleinere Quadrat- und Kubikwurzel.

Es ist z. B. $216 = 216$, daher ist $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{216}$, oder $6 = 6$; ferner ist $64 = 64$, daher ist $\sqrt{64} = \sqrt{64}$, oder $8 = 8$; dann ist $216 > 125$, daher ist $\sqrt[3]{216} > \sqrt[3]{125}$, oder $6 > 5$; endlich ist $25 > 9$, daher ist $\sqrt{25} > \sqrt{9}$, oder $5 > 3$.

VII. Zusatz: Hat die Zahl, welche zum Quadrate, oder Kubus erhoben wird, am Ende Nullen, so erhebt man nur die linksstehenden Zahlziffern zum Quadrate oder Kubus, und hängt dann beym Quadrate zur rechten Seite zweymal, und beym Kubus dreymal so viel Nullen an, als in der gegebenen Zahl vorkommen.

Daher ist z. B. $60^2 = 3600$, und $500^3 = 125000000$;

indem $60^2 = 60 \times 60 = 3600$, und $500^3 = 500 \times 500 \times 500 = 125000000$ (I. §. 55.).

§. 35.

B) Aus einer ganzen Zahl, die nicht mehr als 3 Ziffern hat, die Kubikwurzel auszuziehen.

Auflösung:

1) Man suche in der Linie EF der Tabelle des §. 26. die gegebene Zahl, findet man sie genau, so steht in einer senkrechten Richtung oben in der Linie AB die gesuchte Kubikwurzel.

2) Findet man sie nicht genau, so nehme man von dem nächst kleineren in der Tabelle vorkommenden Kubus die Kubikwurzel, und bemerke sich den Rest, der sich ergiebt, wenn man diesen Kubus von der gegebenen Kubikzahl subtrahirt.

Die Wurzel wird in diesem Falle durch Annäherung bestimmt, wie dieses in der Folge gezeigt werden wird.

I. Beyspiel:

Es soll aus 729 die Kubikwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

Man findet in der Linie EF der Tabelle diesen Kubus, daher steht in einer senkrechten Richtung oben in der Linie AB die verlangte Wurzel 9.

Deßwegen ist $\sqrt[3]{729} = 9$.

II. Beyspiel:

Es soll aus 613 die Kubikwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

Man findet in der Tabelle diesen Kubus nicht, er liegt aber zwischen den Zahlen 512 und 729, welche in der Linie EF vorkommen; daher nehme man von

512 die entsprechende Kubikwurzel 8, erhebe diese Wurzel zum Kubus, und subtrahire diesen von dem gegebenen Kubus 613, man erhält zum Reste 101, um deswillen hat man hier die Zahl 8 als Kubikwurzel gefunden, während 101 als Rest zum Vorscheine kömmt.

§. 36.

C) Aus einer ganzen Zahl die Kubikwurzel auszuziehen, es mag die gegebene Zahl aus wie immer vielen Ziffern bestehen.

Auflösung:

1) Man theile die Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen, und gebe jeder Klasse 3 Ziffern, mit Ausnahme der letzten Klasse, die auch zwey oder ein Ziffer haben darf, und ziehe rechts einen Verticalstrich, oder mache dagegen ein anderes Trennungszeichen.

2) Man ziehe mittels der Tabelle des §. 26. aus der ersten Klasse die Kubikwurzel aus, schreibe diese rechts an den Verticalstrich hin; man erhebe ferner diese Wurzel zum Kubus, subtrahire diesen von der ersten Klasse, indem man das letzte Ziffer desselben unter das letzte Ziffer dieser Klasse schreibt, und setze zum Reste die nächste Klasse.

3) Man nehme das dreyfache Quadrat des gefundenen Wurzeltheiles, und setze dieses so als Divisor unter den Rest und die herabgesetzte Klasse, daß das letzte Ziffer desselben unter das erste Ziffer der zweyten Klasse zu stehen kömmt, wenn man nämlich die Klassen und Ziffern von der Linken zur Rechten zählet.

4) Man dividire wirklich mit dem als Divisor genommenen dreyfachen Quadrate des ersten Theiles, schreibe den Quotienten als den zweyten Wurzeltheil rechts neben den ersten Wurzeltheil hin, und setze nun nachstehende drey Producte:

a) das dreyfache Quadrat des ersten Theiles in den zweyten, d. h., das dreyfache Quadrat des ersten Wurzeltheiles wird mit dem zweyten Wurzeltheile multiplicirt;

b) das dreyfache Quadrat des zweyten Theiles in den ersten; und

c) den Kubus des zweyten Wurzeltheiles:

Diese drey Producte werden dann so unter einander geschrieben:

α) das letzte Ziffer vom dreyfachen Quadrate des ersten Theiles in den zweyten kömmt unter das erste Ziffer der zweyten Klasse zu stehen;

β) das letzte Ziffer vom dreyfachen Quadrate des zweyten Theiles in den ersten kömmt unter das zweyte Ziffer dieser Klasse zustehen; und

γ) das letzte Ziffer des Kubus des zweyten Wurzeltheiles kömmt unter das dritte Ziffer dieser Klasse zu stehen.

5) Die eben benannten 3 Producte werden so, wie sie da stehen, addirt, und ihre Summe wird von dem Reste und der oben stehenden zweyten Klasse subtrahirt.

6) Auf die nämliche Weise verfährt man bey allen folgenden Klassen, die noch herunter zu setzen sind.

Man setzt nämlich jede folgende Klasse zu dem bey der Subtraction zum Vorscheine gekommenen Reste, nimmt dann als Divisor das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Wurzeltheile, die man zusammen wie eine Zahl betrachtet, dividirt damit den Rest mit der heruntergesetzten folgenden Klasse, und setzt den Quotienten als einen neuen Wurzeltheil neben die vorigen Wurzeltheile hin.

Ferner setzt man dann immerhin

a) das dreyfache Quadrat aller vorhergehenden Wurzeltheile in den folgenden, so eben gefundenen Wurzeltheil;

b) das dreyfache Quadrat des folgenden Wurzeltheiles in alle vorhergehende; und

c) den Kubus des folgenden Wurzeltheiles.

Diese drey Producte werden dann jederzeit so untereinander geschrieben, daß

α) das letzte Ziffer des ersten Productes unter das erste Ziffer der herabgesetzten folgenden Klasse,

β) das letzte Ziffer des zweyten Productes unter das zweyte Ziffer dieser Klasse, und

γ) das letzte Ziffer des dritten Productes unter das letzte Ziffer der nämlichen Klasse zu stehen kömmt.

Diese Producte werden dann, wie sie da stehen, allezeit addirt, und ihre Summe wird von dem Reste und der beygefügten Klasse subtrahirt.

7) Kann man einmal mit dem dreyfachen Quadrate der gefundenen Wurzeltheile nicht dividiren, so ist der neue Wurzeltheil Null; man schreibt also Null an die Stelle des folgenden Wurzeltheiles, setzt die nächste Klasse herunter, und nimmt das dreyfache Quadrat der jetzt vorhandenen Wurzeltheile.

Kann man aber einmal die Summe der 3 benannten Producte nicht subtrahiren, so ist der Wurzeltheil so groß, und muß kleiner genommen werden.

8) Erhält man, indem man das Verfahren auf diese Weise immer fortsetzt, zuletzt, wo keine Klasse

mehr zum Heruntersetzen vorhanden ist, keinen Rest, so ist die gesuchte Kubikwurzel genau bestimmt worden, und deßhalb ist dieselbe eine Rationalzahl.

Erhält man aber zuletzt einen Rest, so muß die Wurzel durch Annäherung bestimmt werden; wie dieses geschieht, wird in der folgenden Aufgabe gezeigt wrden.

Zugleich ist noch zu bemerken, daß die Kubikwurzel allezeit so viel Ziffern bekommen muß, als Klassen die gegebene Kubikzahl enthält.

I. Beyspiel:

Es soll aus 157464 die Kubikwurzel angezogen werden.

Auflösung:

1) Man theile diese Zahl in Klassen von der Rechten zur Linken; man erhält 2 Klassen, deßhalb bekömmt die Wurzel auch zwey Ziffern:

der gegebene Kubus	157|464

2) Mittels der Tabelle des §. 26. ziehe man aus der ersten Klasse die Kubikwurzel aus, und schreibe sie rechts nach dem Verticalstriche; den gefundenen ersten Wurzeltheil 5 erhebe man zum Kubus, ziehe diesen von der ersten Klasse ab, indem man das letzte Ziffer desselben unter das letzte Ziffer dieser Klasse schreibt, und setze zum Reste die nächste Klasse:

der gegebene Kubus	157|464	5
der Kubus des ersten Theiles	125 |	der erste
der Rest mit der nächsten Klasse	32464	Wurzeltheil ist 5

3) Man nehme das dreyfache Quadrat des ersten Wurzeltheiles als Divisor; es ist $5 \times 5 = 25$, und $25 \times 3 = 75$, dann schreibe man das letzte Ziffer davon unter das erste Ziffer der zweyten Klasse, somit 5 unter 4; ferner dividire man 32 mit 7, man erhält den Quotienten 4 als den zweyten und letzten Wurzeltheil.

Nun setze man

a) das dreyfache Quadrat des ersten Theiles in den zweyten; es ist das dreyfache Quadrat des ersten Theiles = 75, und dieses mit 4 multiplicirt giebt 300, davon kömmt das letzte Ziffer, somit die Null unter das erste Ziffer der zweyten Klasse zu stehen;

b) das dreyfache Quadrat des zweyten Theiles in den ersten; es ist 4 × 4 = 16, dann 16 × 3 = 48, und daher 48 × 5 = 240, davon kömmt das letzte Ziffer, somit die Null unter das zweyte Ziffer der letzten Klasse zu stehen; endlich

c) setze man den Kubus des zweyten Theites; es ist 4 × 4 × 4 = 64, davon schreibe man das letzte Ziffer unter das letzte Ziffer der zweyten Klasse, welche in diesem Beyspiele die letzte Klasse ist:

	157|464	{ 54
	125	der zweyte
	32464	Wurzeltheil
Das dreyfache Quadrat des 1ten Theiles als Divisor	75	ist 4.
a) Das dreyfache Quadrat des 1ten Theiles in den 2ten	300	
b) Das dreyfache Quadrat des zweyten Theiles in den 1ten	240	
c) der Kubus des zweyten Theiles	64	
Die Summe dieser 3 Producte	32464	

4) Addirt man die erwähnten drey Producte, wie dieses bereis geschehen ist, und subtrahirt man ihre Summe von dem Reste und der beygesetzten letzten Klasse, so bleibt hier nichts mehr übrig.

Daher ist $\sqrt[3]{157464} = 54$.

II. Beyspiel:

Es soll aus 75.955'677.875 die Kubikwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

Der gegebene Kubus	75|955|677|875	4235
Der Kubus des 1ten Wurzeltheiles	64	der erste Wurzeltheil ist 4, der zweyte ist 2, der dritte ist 3, und der vierte Wurzeltheil ist 5.
Der Rest mit der nächsten Klasse	11955	
Das dreyfache Quadrat des 1ten Theiles	48	
a) Das dreyfache Quadrat des 1ten Theiles in den 2ten	96	
b) Das dreyfache Quadrat des 2ten Theiles in den 1ten	48	
c) Der Kubus des 2ten Theiles	8	
Die Summe dieser drey Producte	10088	
Der Rest mit der dritten Klasse	1867677	
Das dreyfache Quadrat des 1ten und 2ten Theiles	5292	
a) Das dreyfache Quadrat des 1ten und 2ten Theiles in den 3ten	15876	
b) Das dreyfache Quadrat des 3ten Theiles in den 1ten und 2ten	1134	
c) Der Kubus des 3ten Theiles	27	
Die Summe dieser drey Producte	1598967	
Der Rest mit der letzten Klasse	268710875	
Das dreyfache Quadrat des 1ten, 2ten und 3ten Theiles	536787	
a) Das dreyfache Quadrat der drey ersten Theile in den 4ten	2683935	
b) Das dreyfache Quadrat des 4ten Theiles in die 3 ersten Theile	31725	
c) Der Kubus des letzten Theiles	125	
Die Summe dieser 3 Producte	268710875	

Daher ist $\sqrt[3]{75.955'677.875} = 4235$.

III. Beyspiel zu a.

Es soll aus 748'613.312 die Kubikwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

1) Man theile die Zahl in Klassen und verfahre hier, wie in den beiden so eben angeführten Beyspielen, man erhält zum Reste 9, welchem man die nächste Klasse beysetzt:

Der gegebene Kubus 748|613|312 ⎧ 9
Der Kubus des 1ten Theiles 729 ⎩ der erste Wurzeltheil ist 9.
Der Rest mit der 2ten Klasse 19613

2) Man nehme das dreyfache Quadrat des ersten Theiles, man erhält 243, indem 9 × 9 = 81, und 81 × 3 = 243; das letzte Ziffer davon schreibe man unter das erste Ziffer der zweyten Klasse, somit 3 unter 6.

Die Zahl 196 ist nicht theilbar durch 243, oder 1 läßt sich durch 2 nicht dividiren, daher ist der zweyte Wurzeltheil Null, man setze also zum ersten Reste und der zweyten Klasse auch die dritte Klasse herunter:

748|613|312 ⎧ 90
729 ⎩ der zweyte Wurzeltheil ist 0.
19613
Das dreyfache Quadrat des 1ten Theiles 243
Der 1te Rest mit der 2ten und 3ten Klasse 19613312

3) Man nehme nun das dreyfache Quadrat der beiden ersten Wurzeltheile, man erhält 24300, indem 90 × 90 = 8100, und 8100 × 3 = 24300.

Diese Zahl nehme man als den Divisor, und verfahre auf die vorige Weise, man erhält zuletzt keinen Rest mehr.

748|613|312 ⎧ 908
720 ⎩ der letzte Wurzeltheil ist 8.
19613
243
19613312
Das dreyfache Quadrat der beiden ersten Theile 24300
a) Das dreyfache Quadrat der beiden er. Theile in den 3ten 194400
b) Das dreyfache Quadrat des 3ten Theiles in die beiden ersten Theile 17280
c) Der Kubus des dritten Theiles 512
Die Summe dieser 3 Producte 19613312

Daher ist $\sqrt[3]{748'613.312} = 908$.

Anmerkung: Würde einmal kein Rest während der Ausziehung der Quadrat- oder Kubikwurzel bleiben, und es wären noch mehrere Klassen von Nullen vorhanden, so setzt man in die Wurzel ohne ein weiteres Verfahren gleich am Ende so viele Nullen, als solche Klassen vorhanden sind.

§. 37.

D) Aus einer ganzen Zahl, welche keine vollkommene Kubikzahl ist, die Kubikwurzel durch Annäherung zu bestimmen.

Wenn bey Ausziehung der Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl zuletzt, wenn keine Klasse mehr zum Heruntersetzen vorhanden ist, ein Rest bleibt, so ist die Wurzel ebenfalls (§. 30.) eine Irratinalzahl, die man durch Annäherung bis auf so viele Decimalen bestimmt, als es der vorliegenden Aufgabe gemäß nothwendig ist.

Einen solchen Kubus nennt man dann einen unvollständigen — unvollkommenen Kubus, indem die demselben entsprechende Wurzel nie genau bestimmt werden kann, und es somit keine Zahl giebt, die zum Kubus erhoben die gegebene Kubikzahl wieder giebt.

Die Ausziehung der Kubikwurzel durch Annäherung geschieht nach folgenden Regeln:

1) Nach den im §. 36. aufgestellten Regeln ziehe man die Kubikwurzel aus, bis man alle Klassen herunter gesetzt hat.

2) Nun setze man zum letzten Reste drey Nullen zur rechten Seite hin, und verfahre auf die bekannte Weise.

3) Zum jetzigen Reste setze man wieder drey Nullen, und setze dieses Verfahren, indem immerhin ein Rest bleibt, so lange fort, als man es für nöthig erachtet, um für die vorliegende Aufgabe mit der gehörigen Genauigkeit die verlangte Kubikwurzel zu finden.

4) So oft 3 Nullen, um gleichsam die fehlenden Klassen zu ergänzen, den Resten beygesetzt werden, eben so viele Decimalen schneide man von der Rechten zur Linken ab, oder, was eines ist, man mache bey Ausziehung der Kubikwurzel, wie ein Rest bleibt, und zum Heruntersetzen keine Klasse mehr vorhanden ist, ein Comma, und verfahre dann auf die angegebene Weise.

Die links vor dem Comma stehenden Ziffern machen die ganze Zahl, und die nach demselben folgenden die Decimalen aus.

Wie bey Ausziehung der Quadratwurzel, so wird auch hier auf dieses Comma beym wirklichen Ausziehen der Kubikwurzel keine fernere Rücksicht mehr genommen.

Beyspiel:

Es soll aus 3 die Kubikwurzel durch Annäherung bis auf 3 Decimalen ausgezogen werden.

Auflösung:

```
      3⟨1,442.....
        1
     --------
   1) 2000
        3
     --------
       12
        48
         64
     --------
       1744
     ------------
   2)  256000
        588
     ------------
       2352
         672
          64
     ------------
       241984
     ----------------
   3)    14016000
          62208
     ----------------
         124416
           1728
              8
     ----------------
         12458888
     ----------------
 Rest     1557112
```

Weil man dreymal anstatt der folgenden Klasse 3 Nullen dem Reste beysetzte, so muß man von der Rechten zur Linken auch 3 Decimalen abschneiden; daher ist $\sqrt[3]{3} = 1,442 \ldots$

I. Zusatz: Ob die Kubikwurzel durch Annäherung zu bestimmen ist oder nicht, erkennet man bey der wirklichen Ausziehung derselben, indem man da sieht, ob zuletzt ein Rest bleibt oder nicht. Bleibt bey Ausziehung der Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl zuletzt ein Rest, so muß die Wurzel durch Annäherung bestimmt werden. Bleibt aber kein Rest, so wird die Wurzel genau gefunden.

II. Zusatz: So oft der Kubus des ersten Thei-

les oder überhaupt der Subtrahend wirklich abgezogen werden kann, und somit ein Rest bleibt oder derselbe Null ist, so hat man die einzelnen Wurzeltheile nicht zu groß genommen, gleichwie die ganze gefundene Kubikwurzel nicht zu groß ist, wenn ihr Kubus nicht größer ist, als die gegebene Kubikzahl, aus welcher die Kubikwurzel ausgezogen worden ist.

Die Kubikwurzel ist auch nicht zu klein, wenn entweder kein Rest bleibt, oder derselbe kleiner ist, als jene Summe, die man erhält, wenn man zum dreyfachen Quadrate der gefundenen Kubikwurzel das Dreyfache derselben und die Zahl 1 addirt.

Daher ist z. B. 4 als die Kubikwurzel von 27 zu groß, weil $4 \times 4 \times 4 = 64$, und $64 = 4^3$ größer ist als 27, folglich 64 von 27 nicht subtrahirt werden kann. Dagegen ist 3 die wahre Kubikwurzel von 27, weil $3 \times 3 \times 3 = 27$, und $27 - 27 = 0$.

Sollte z. B. aus 146 die Kubikwurzel ausgezogen werden, so wäre die angenommene Kubikwurzel 4 zu klein, weil $4^3 = 64$, dann $146 - 64 = 82$, und der Rest 82 nicht kleiner ist, als $3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1 = 61$.

Dagegen ist die Wurzel 5 nicht zu klein, weil $5^3 = 125$, dann $146 - 125 = 21$, und daher der Rest 21 kleiner ist, als die Summe des dreyfachen Quadrates sammt der dreyfachen Wurzel und 1, oder $21 < 3 \times 5^2 + 3 \times 5 + 1$, d. h., $21 < 91$.

§. 38.

E) Aus einem Decimalbruche die Kubikwurzel auszuziehen.

Auflösung:

Aus einem gemischten oder ungemischten Decimalbruche wird die Kubikwurzel nach folgenden Regeln ausgezogen:

1) Man theile die Decimalen, indem man unmittelbar nach dem Comma anfängt, von der Linken zur Rechten in Klassen, deren jede 3 Ziffern hat; die bey der letzten Klasse etwa fehlenden Ziffern ergänze man durch Nullen, indem man eine oder zwey Nullen rechts den Decimalen beysetzt, je nachdem noch ein oder zwey Ziffern abgehen sollten. Nach diesem theile man auf die bekannte Weise die etwa dem Decimalbruche angehängte Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen.

2) Nach den im §. 36. aufgestellten Regeln wird nun die Kubikwurzel ausgezogen, und alle Ziffern vor und nach dem Comma zusammen wie eine ganze Zahl betrachtet.

3) Kommen im Decimalbruche keine Ganzen vor, so bekömmt auch die gesuchte Kubikwurzel keine Ganzen, weßhalb alle gefundenen Ziffern Decimalen sind.

Kommen aber ganze vor, so drücken die links stehenden Ziffern der Wurzel wieder eine ganze Zahl mit so vielen Ziffern aus, als Klassen die ganze Zahl des gegebenen Bruches enthält; die übrigen Ziffern von der Linken zur Rechten sind dann die Decimalen.

Kommen im Decimalbruche keine Ganzen vor, so schreibt man auch gewöhnlich gleich anfangs die Null und das Comma (0,), alle folgenden Ziffern sind dann Decimalen.

Kommen Ganze vor, so macht man das Comma, wie die Klassen der ganzen Zahl aufhören, ohne daß man beym wirklichen Ausziehen der Wurzel auf dieses Comma noch eine fernere Rücksicht nimmt.

Die vor dem Comma stehenden Ziffern drücken

wieder eine ganze Zahl, und die nach dem Comma folgenden Ziffern drücken dann die Decimalen aus.

4) Bleibt zuletzt ein Rest, so kann die Kubikwurzel, indem man allezeit anstatt der folgenden Klasse 3 Nullen zum Reste setzt, so genau bestimmt werden, als es die vorliegende Aufgabe erfodert.

Die gefundene Wurzel bekömmt dann um so viele Decimalstellen mehr, als oft solche 3 Nullen dem Reste beygesetzt worden sind.

I. Beyspiel:

Es soll aus 1520,875 die Kubikwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

1) Weil die Decimalen genau eine Klasse von 3 Ziffern ausmachen, so theile man auch die ganze Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen, und ziehe somit aus 1520875 die Kubikwurzel aus; es ist $\sqrt[3]{1520875} = 115$.

2) Da nun die ganze Zahl 2 Klassen hat, so bekömmt auch die Wurzel eine ganze Zahl von 2 Ziffern; deßwegen ist $\sqrt[3]{1520,875} = 11,5$.

II. Beyspiel:

Es soll aus 14,8 die Kubikwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

1) Man hänge dem Decimalziffer rechts 2 Nullen an, und ziehe aus 14800 die Kubikwurzel aus, man erhält 24,5 ....

2) Weil die ganze Zahl 14 nur eine Klasse bildet, so bekömmt auch die Wurzel eine ganze Zahl mit einem Ziffer; daher ist $\sqrt[3]{14,8} = 2,45 \ldots$

§. 39.

F) Aus einem gemeinen Bruche die Kubikwurzel auszuziehen.

Auflösung:

1) Ist der gegebene Bruch ein gemischter Bruch, so richte man ihn ein, um denselben in der Gestalt eines ungemischten Bruches zu erhalten (II. §. 28.).

2) Man ziehe nun allererst aus dem Nenner die Kubikwurzel aus, um zu sehen, ob zuletzt noch ein Rest bleibt, und also daraus zu erkennen, ob der Nenner ein vollkommener Kubus ist, oder nicht.

3) Ist der Nenner ein vollständiger Kubus, so ziehe man auch aus dem Zähler des gemeinen Bruches die Kubikwurzel aus.

Bleibt zuletzt kein Rest, so ist auch der Zähler des Bruches ein vollkommener Kubus.

4) Die Wurzel des Zählers nehme man als Zähler, und die Wurzel des Nenners als Nenner jenes Brnches, der die verlangte Kubikwurzel ausdrückt.

5) Ist der Nenner ein unvollständiger Kubus, so multiplicire man mit dem Quadrate des Nenners den Zähler, und ziehe nun aus diesem Producte entweder nach §. 36., oder im Falle zuletzt ein Rest bleibt, nach Vorschrift des §. 37. mittels der Annäherung der Kubikwurzel bis auf so viele Decimalstellen aus, als es die vorliegende Aufgabe erfodert.

Wenn der Zähler nicht gleich ist dem Nenner, so ist die Wurzel dieses Productes allezeit eine Irrationalzahl, die man durch Annäherung bestimmen muß.

Ist aber der Zähler gleich dem Nenner, so läßt man das Wurzelzeichen weg, und die Wurzel ist der vorige Bruch, indem ein solcher Bruch gleich 1, und jede Wurzel von 1 wieder 1 ist.

6) Die gefundene Wurzel des mit dem Quadrate des Nenners multiplicirten Zählers setze man als Zähler, und den unveränderten Nenner als Nenner jenes Bruches, der die verlangte Kubikwurzel ausdrückt.

7) In diesem letzteren Falle dividire man nach den bey den Decimalbrüchen aufgestellten Regeln der Division den Zähler mit dem Nenner, welcher eine ganze Zahl ist, und man erhält die gesuchte Wurzel in der Gestalt eines Decimalbruches.

8) Zusammengesetzte, oder gebrochene Brüche müssen nach den im II. Theile §. 42. aufgestellten Regeln in einfache Brüche verwandelt werden, damit man auf die eben angezeigte Weise die Kubikwurzel ausziehen kann.

Aus einem gemeinen Bruche kann die Kubikwurzel auch nach dieser Regel ausgezogen werden:

1) Man verändere den gemeinen Bruch, dem man vorhin, wenn es nöthig gewesen ist, die Gestalt eines ungemischten und einfachen Bruches gegeben hat, in einen endlichen Decimalbruch, oder, im Falle dieses nicht geschehen kann, nach Vorschrift des §. 7. in einen unendlichen Decimalbruch mit so vielen Decimalstellen, als nöthig sind, um die gesuchte Wurzel mit der gehörigen Genauigkeit zu erhalten.

Soll z. B. die Kubikwurzel bis auf 3 Decimalstellen bestimmt werden, so muß man dann den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch von 9 Decimalstellen verwandeln.

2) Aus dem Decimalbruche ziehe man nun nach §. 38. die Kubikwurzel aus, und man hat dadurch die verlangte Kubikwurzel des gegebenen gemeinen Bruches.

I. Beyspiel:

Es soll aus $^{27}/_{64}$ die Kubikwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

Man ziehe die Kubikwurzel aus 64 und 27 aus, man erhält 4 und 3.

Daher ist $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = {}^{3}/_{4}$.

II. Beyspiel:

Es soll aus $^{3}/_{4}$ die Kubikwurzel ausgezogen werden.

I. Auflösung:

1) Weil 4 kein vollkommener Kubus ist, so multiplicire man den Zähler 3 mit dem Quadrate von 4, d. h., mit 16, man erhält 48.

2) Aus 48 ziehe man die Kubikwurzel aus, man erhält 3,6 ..., indem $\sqrt[3]{48} = 3{,}6 \ldots.$

3) Diese Wurzel dividire man mit dem unveränderten Nenner 4, man erhält 0,9 ....

Daher ist $\sqrt[3]{^{3}/_{4}} = 0{,}9 \ldots$

II. Auflösung:

1) Man verwandle den Bruch $^{3}/_{4}$ in einen Decimalbruch, man erhält 0,75.

2) Aus dem Decimalbruche ziehe man die Kubikwurzel aus, man erhält 0,9 ....

Daher ist $\sqrt[3]{^{3}/_{4}} = \sqrt[3]{0{,}75} = 0{,}9 \ldots$

III. Beyspiel:

Es soll aus $15\,^{5}/_{8}$ die Kubikwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

1) Man verwandle diesen Bruch in einem ungemischten, indem man denselben einrichtet, man erhält $^{125}/_{8}$, indem $15\,^{5}/_{8} = {}^{125}/_{8}$.

2) Aus $^{125}/_{8}$ ziehe man die Kubikwurzel aus, man erhält $^{5}/_{2}$.

Daher ist $\sqrt[3]{14\,^{5}/_{8}} = \sqrt[3]{^{125}/_{8}} = {}^{5}/_{2} = 2\,^{1}/_{2}$.

§. 40.

Die Probe, die Ausziehung der Kubikwurzeln betreffend.

a) Ist bey Ausziehung der Kubikwurzel zuletzt kein Rest geblieben, und somit dieselbe eine Rationalzahl, so erhebe man diese nach §. 34. zum Kubus, man muß, im Falle die Rechnung richtig ist, den anfangs gegebenen Kubus wieder erhalten.

b) Ist bey Ausziehung der Kubikwurzel ein Rest geblieben, und dieselbe somit durch Annäherung bis auf eine gewiße Anzahl von Decimalstellen bestimmt worden, so erhebe man den Decimalbruch zum Kubus, und addire zu diesem den zuletzt gebliebenen Rest, man muß wieder die gegebene Kubikzahl erhalten.

I. Beyspiel:

Im I. Beyspiele des §. 36. hat man aus 157464 die Kubikwurzel ausgezogen, und die Zahl 54 gefunden.

Zur Probe erhebe man nach §. 34. diese Zahl zum Kubus, und man erhält wieder 157464, indem $54 \times 54 \times 54 = 157464$.

Daher ist 54 wirklich die verlangte Kubikwurzel.

II. Beyspiel:

Im Beyspiele des §. 37. hat man aus 3 die Kubikwurzel durch Annäherung ausgezogen, und die Zahl 1,442 . . . gefunden.

Zur Probe erhebe man 1,442 zum Kubus, man erhält 2,998442888, dazu addire man den zuletzt ge-

bliebenen Rest 0,001557112, indem man das letzte Ziffer davon unter das letzte Ziffer des Kubus, und dann die übrigen Ziffern der Ordnung nach von der Rechten zur Linken unter einander schreibt, man erhält zur Summe 3,000000000 = 3; daher ist 1,442... wirklich die gesuchte Wurzel.

III. Beyspiel:

Im II. Beyspiele des §. 39. hat man aus $^3/_4$ die Kubikwurzel ausgezogen, und zufolge der I. Auflösung die Zahl 0,9... gefunden, indem man die Wurzel des Zählers, welchen man vorhin mit 16 multiplicirte, mit 4 dividirte.

Die Wurzel des Zählers des gegebenen Bruches ist die Zahl 3,6 ...

Nun ist aber 3,6 × 3,6 × 3,6 = 46,656; ad. man den zuletzt gebliebenen Rest 1,344 dazu, den man auf die vorhin angezeigte Weise unter dieses Product schreibt, so erhält man 48,000 = 48.

Es ist aber 48 : 16 = 3, daher ist 0,9 ... wirklich die gesuchte Kubikwurzel von $^3/_4$.

In Gemäßheit der II. Auflösung hat man den Bruch $^3/_4$ in den Decimalbruch 0,75 verwandelt.

Die angebliche Kubikwurzel von $^3/_4$ erhebe man nun zum Kubus, es ist 0,9 × 0,9 × 0,9 = 0,729 und addire auf die angezeigte Weise den Rest 0,021 dazu, man erhalt 0,750 = 0,75.

Diesen Decimalbruch verwandle man in einen gemeinen Bruch, es ist $0{,}75 = {}^{75}/_{100} = \frac{75 : 25}{100 : 25} = {}^3/_4$; daher ist 0,9 .... wirklich die gesuchte Kubikwurzel von $^3/_4$.

Mittels des Gesagten ist man jetzt selbst im Stande, in den übrigen vorkommenden Fällen die Probe anzustellen.

Anmerkung: Die Gründe des Verfahrens in Absicht auf die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln in Zahlen werden in der Buchstabenrechnung, nachdem vorhin die allgemeinen Quadrirungs- und Kubirungsgesetze aufgestellt worden sind, angegeben werden.

II.

Wiederholung in Fragen und Beyspiele.

§. 41.

Wiederholung in Fragen.

1) Welche Zahl heißt man ein Quadrat, oder einen Kubus, und welche Zahl wird eine Quadrat- oder Kubikwurzel genannt?

2) Was heißt dieses, eine gegebene Zahl zum Quadrate oder Kubus erheben, und was will dieses sagen, aus einer Zahl die Quadrat- oder Kubikwurzel ausziehen.

3) Wozu dient die im §. 26. vorkommende Tabelle?

4) Welche Zahl nennt man ein unvollkommenes Quadrat, und welche wird ein unvollständiger oder unvollkommener Kubus genannt?

5) Was heißt dieses, die Quadrat- oder Kubikwurzel durch Annäherung ausziehen; in welchen Fällen, und nach welchen Regeln muß diese Annäherung geschehen?

6) Wie kann man wissen, daß die gefundene Quadrat- oder Kubikwurzel weder zu groß, noch auch zu klein genommen worden ist?

7) Wie sind die Quadrate und Quadratwurzeln von gleichen oder ungleichen Zahlen beschaffen; was erhält man für einen Kubus, wenn man gleiche oder ungleiche Zahlen zum Kubus erhebt, und wie sind die Kubikwurzeln von gleichen oder ungleichen Zahlen beschaffen?

8) Wie wird ein gemischter oder ein zusammengesetzter gemeiner Bruch zum Quadrate oder Kubus erhoben, und wie wird aus einem solchen Bruche die Quadrat- oder Kubikwurzel ausgezogen?

9) Nach welcher Regel macht man in Absicht auf die gesuchte Quadratwurzel die Probe?

10) Wie wird bey Ausziehung der Kubikwurzel die Probe gemacht?

§. 42.
Beyspiele zur Uebung.

I.

Ist bey einer stättigen geometrischen Proportion eines der äusseren Glieder unbekannt, so erhält man dasselbe, wenn man das Quadrat des mittleren Gliedes mit dem bekannten äusseren Gliede dividirt; dagegen wird bey einer solchen Proportion die mittlere geometrische Proportionalzahl gefunden, wenn man aus dem Produete der beiden äussern Glieder die Quadratwurzel auszieht (II. §. 58. Anm. 2.).

Wie groß ist nun die mittlere geometrische Proportionallinie, wenn die erste der beiden gegebenen Linien 400, und die andere 900 baierische Fuß beträgt?

II.

Die Seite eines Quadrates, welches hinsichtlich des Flächeninhaltes einem Rechtecke gleich ist, ist die mittlere geometrische Proportionallinie zu der Grundlinie, und Höhe des Rechteckes.

Wie groß müßte demnach die Seite eines solchen Quadrates seyn, wenn die Höhe des Rechteckes 400, und die Grundlinie desselben 1600 baier. Fuß hält?

III.

Eine Summe Geldes von 2744 fl. wurde unter mehrere Personen vertheilt, und jede Person bekam so viele Gulden, als es Individuen zur Vertheilung gewesen sind; wie viel sind es demnach Personen gewesen, und wie viele Gulden hat jede erhalten?

IV.

Wie groß ist die Summe der ersten 20 ungeraden, in der natürlichen Ordnung fortlaufenden Zahlen, als 1 „ 3 „ 5 „ 7 ꝛc., da es bekannt ist, daß man diese Summe erhalte, wenn man die Zahl, welche die Anzahl derselben ausdrückt, quadrirt?

V.

Es wird in der Physik bewiesen, daß die Räume, welche von frey herabfallenden Körpern durchlaufen

werden, mit den Quadraten der Zeiten, während welchen die Bewegung geschieht, gerade proportionirt sind, wie weit wird demnach ein Stein im freyen Falle in einer halben Stunde kommen, da es bekannt ist, daß ein Körper im freyen Falle in der ersten Secunde beynahe 15 Pariser Fuß zurücklegt?

VI.

Der Boden eines Saales hat die Gestalt eines Quadrates, und ist mit 1600 Steinen bedeckt, wovon jeder die Gestalt eines baier. Quadratschuhes hat; wie viel baierische Fuß hält nun dieser Saal in der Länge und Breite, da man den Flächeninhalt eines Quadrates erhält, wenn man eine Seite desselben, welche die Länge oder Breite ausdrückt, zum Quadrate erhebt?

VII.

Im geradlinigten rechtwinklichten Dreyecke wird jene Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, Hypothenuse, und die beiden übrigen werden die Perpendikel desselben genannt.

Ein solches Perpendikel erhält man, wenn man das Quadrat des anderen Perpendikels vom Quadrate der Hypothenuse subtrahirt, und aus dieser Differenz die Quadratwurzel auszieht; die Hypothenuse erhält man aber, wenn man aus der Summe der Quadrate der beiden Perpendikel die Quadratwurzel auszieht.

a) Wenn nun der Punct, auf dem ich stehe, von der Spitze eines Thurmes 500, und zugleich von dem untersten Theile desselben 400 baier. Schuh entfernt ist; wie viel baier. Fuß beträgt die Höhe dieses Thurmes, da dieselbe ein Perpendikel, die Entfernung des besagten Punctes von der Spitze die Hypothenuse, und die Entfernung desselben vom untersten Theile des Thurmes das andere Perpendikel des vorhin erwähnten Dreyeckes ausmacht?

b) Will man mittels einer Leiter eine Stadtmauer besteigen, welche mit einem Graben umgeben ist, so bildet die am Rande des Grabens angelegte Leiter die Hypothenuse, die Höhe der Mauer ein Perpendikel,

und die Breite des Grabens das andere Perpendikel eines geradlinigten rechtwinklichten Dreyeckes; wie lange müßte demnach zu diesem Zwecke eine Leiter seyn, wenn die Mauer 50, und die Breite des Grabens 40 baier. Fuß beträgt?

VIII.

Man erhält den kubischen Inhalt jenes regulären geometrischen Körpers, welcher ein Würfel (Cubus) genannt wird (I. §. 81. Nro. 3.), und dessen Länge, Breite und Höhe gleich groß ist, wenn man die Zahl, welche die Größe einer Seite ausdrückt, zum Kubus erhebt; und umgekehrt findet man aus dem bekannten körperlichen Inhalte des Würfels die Länge, Breite und Höhe desselben, wenn man aus der Zahl, welche die Größe desselben ausdrückt, die Kubikwurzel auszieht.

a) Wie viel baier. Kubikfuß hält demnach ein Gebäude, welches die Gestalt eines Würfels hat, und dessen Länge 104,25 baier. Schuh hält?

b) Wie viel geographische Meilen müßte die Länge eines Würfels betragen, wenn derselbe dem körperlichen Inhalte nach der Erde, welche nach einigen Angaben 2.659'310.190 Kubikmeilen hält, gleich wäre?

c) Wie lang, wie breit, und wie hoch muß ein würfelförmiges Gefäß seyn, damit es 6 baier. Kubik-Schuh Wasser faßt?

IX.

Es wurden 230 fl. 14 kr., somit 13824 Häller unter einige Personen vertheilet. Jede Person bekam so viele Geldstücke, als es Personen waren, und jedes Geldstück ist so viele Häller werth, als viele Geldstücke eine Person bekam. Wie viel waren es Personen, wie viele Häller galten die Geldstücke, und wie viel bekam jede Person?

II. Hauptstück.

Von den ersten Elementen der Buchstabenrechnung, und den Progressionen, wie auch von der Auflösung der einfachen Gleichungen.

I. Abschnitt.

Von den vier Grundrechnungsarten mit Buchstaben.

I.

Einleitung zu den vier Grundrechnungsarten mit Buchstaben.

§. 43.

Erklärungen.

a) Drückt man die Zahlen mit Buchstaben aus, um mittels dieser allgemeinen Zeichen aus gegebenen Größen andere unbekannte zu finden, so nennt man diese Rechnung mit Buchstaben die Buchstabenrechnung (Calculus litteralis), wie dieses schon im I. Theile §. 7. erwähnt wurde.

b) Die Buchstaben drücken an und für sich keine bestimmten Zahlen aus; es kann daher z. B. mit dem Buchstaben a jede nur immer vorkommende Zahl ausgedrückt werden. Indessen muß aber der nämliche Buch-

stabe in der nämlichen Rechnung immer auch die nämliche Größe bezeichnen; drückt z. B. bey Auflösung einer Aufgabe der Buchstabe a die benannte Zahl „1000 fl." aus; so bezeichnen dann die Ausdrücke 2a, 3a, 6a ꝛc. bey der nämlichen Aufgabe die benannten Zahlen 2000 fl., 3000 fl., 6000 fl., ꝛc. indem sich der nämliche Buchstabe bey der nämlichen Rechnung immer auf die nämliche Größe beziehen muß.

c) Will man überhaupt gewiße Zahlen, somit allgemeine, und unbestimmte Zahlen ausdrücken, so bedient man sich der Buchstaben, und zwar der kleineren Buchstaben des lateinischen Alphabets, wiewohl sich auch Fälle ergeben, wo man zu diesem Zwecke die größeren lateinischen Buchstaben, wie auch die deutschen und griechischen benützt. Indessen geschiebt die Bezeichnungsweise mit den kleinen lateinischen Buchstaben gewöhnlich, die anderen nimmt man nur dann zu Hilfe, wenn es der Beweis gewißer Lehrsätze, oder die Auflösung gegebener Aufgaben, wo mehrere verschiedene Größen vorkommen, erfodert.

Will ich z. B. überhaupt eine Summe Geldes, oder eine Anzahl von Menschen ausdrücken, ohne daß ich bestimmt sage, wie viel es Gulden oder Menschen sind, so drücke ich diese Größen allgemein durch die Buchstaben aus, indem sage „es sind a Menschen oder b Gulden"; dadurch habe ich nun jede beliebige Anzahl von Menschen oder Gulden ausgedrückt.

Der Kürze wegen werden aber auch bestimmte Zahlen mit den Buchstaben bezeichnet, wie dieses in dem vorhin bey b angeführten Beyspiele der Fall war, wo ich die benannte Zahl 1000 fl. mit dem Buchstaben a bezeichnete.

d) Damit man immerhin bestimmt weiß, welche Größen bekannt und gegeben, welche hingegen unbekannt und zu suchen sind, so werden

a) die gegebenen und bekannten Zahlen mit den Anfangsbuchstaben a, b, c ꝛc. und

b) die unbekannten Zahlen und Größen mit den letzten Buchstaben des Alphabets z, y, x ꝛc. ausgedrückt.

Es werden späterhin die Anfangs- und Endesbuchstaben in einer anderen Bedeutung genommen, indem man damit die veränderlichen und beständigen Größen bezeichnet; worauf aber jetzt noch keine Rücksicht genommen wird.

e) Anstatt daß ich sage „100 fl. und 100 fl. und wieder 100 fl. oder 100 fl. + 100 fl. + 100 fl.“ sage ich kürzer „300 fl.“ Eben so verhält sich die Sache, wenn man die Größen mit Buchstaben ausdrückt, weil die nämlichen Buchstaben in der nämlichen Rechnung immer auch das Nämliche ausdrücken; anstatt daß ich z. B. sage „$a + a + a + a$“ drücke ich mich kürzer aus, wenn ich sage „$4a$“.

Die Zahl 4 bey dem Ausdrucke „$4a$“, und überhaupt diejenigen Zahlen, welche anzeigen, wie oft die nämliche Größe als Summand stehen soll, werden Coefficienten genannt; dieselben werden links neben die vorkommende Größe hingeschrieben; z. B. in den Ausdrücken $4ab$, $6f$, $8mn$ sind die linksstehenden Ziffern 4, dann 6, und 8 die Coefficienten.

Die Coefficienten werden gewöhnlich mit Ziffern ausgedrückt; es giebt aber auch Fälle, wo man dieselben mit Buchstaben bezeichnet.

So oft daher die nämliche Größe zu sich selbst addirt werden soll, so schreibt man sie kürzer nur einmal mit dem beygefügten Coefficienten, welcher dann anzeigt, wie oft diese Größe als Summand stehen soll; um deswillen dienen in diesem Falle die Coefficienten dazu, um auf eine einfachere Weise die Summen auszudrücken.

Kömmt eine Größe nur einmal vor, so hat sie den Coefficienten 1, welcher nicht geschrieben wird; daher haben z. B. die Größen a, bd ɾc., bey welchen links keine Coefficienten stehen, zu ihrem Coefficienten die Zahl 1, welche bey solchen Größen als Coefficient gedacht werden muß.

f) In der Buchstabenrechnung, sind die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Größen gleichartig (§. 43. b); um deswillen werden auch diejenigen Ausdrücke, wo die nämlichen Buchstaben vorkommen, gleichartig,

tig, und diejenigen, wo verschiedene Buchstaben vorkommen, ungleichartig genannt, es mögen übrigens die Coefficienten beschaffen seyn, wie sie wollen; daher sind die Ausdrücke 4ab, 6ab ꝛc. gleichartig, hingegen aber 4a, 4b, 6c ꝛc. sind ungleichartig.

Es wird bey Potenzen, damit sie gleichartig sind, auch erfodert, daß die nämlichen Buchstaben gleiche Exponenten haben; davon wird aber in der Folge bey den vier Rechnungsarten mit Potenzen die Rede seyn.

§. 44.

Die bey den vier Rechnungsarten mit Buchstaben vorkommenden Grundsätze, Zeichen ꝛc.

a) Die im I. Theile dieses Lehrbuches von der Addition, Subtraction, Multiplication und Division aufgestellten Begriffe bleiben auch bey der Buchstabenrechnung die nämlichen, indem z. B. auch hier die Addition darinn besteht, daß man eine Größe findet, die den gegebenen zusammengenommen gleich ist.

Der Begriff von der Multiplication macht davon allein eine Ausnahme, weil in der Buchstabenrechnung positive und negative Größen vorkommen, wo also auch die den Größen voranstehenden Zeichen zu berücksichtigen sind, wie ich dieses bey der Multiplication noch besonders bemerken werde.

b) Die Ausdrücke „Summe, Summand, Minuend, Rest, Product ꝛc. werden in der Buchstabenrechnung in dem nämlichen Sinne, wie es bisher in der gemeinen Arithmetik geschehen ist, genommen; die Summe z. B. ist immerhin jene Größe, die den übrigen zusammengenommen gleich ist.

c) Die vier Rechnungsarten werden in der Buchstabenrechnung mit den nämlichen bereits bekannten Zeichen, wie in der gemeinen Arithmetik, angezeigt.

Bloß in Absicht auf die Multiplication ist zu bemerken, daß es da eingeführt worden ist, im Producte die Buchstaben ohne Zeichen zusammenzusetzen; so oft man demnach zwey oder mehrere Buchstaben, oder auch

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Ziffern und Buchstaben, wie dieses bey den Coefficienten der Fall ist, ohne Zeichen beysammen steht, so hat man allezeit Producte vor sich; z. B. ab, 4m rc. d. h., a ist mit b multiplicirt, m ist 4mal als Summand gesetzt oder m ist mit 4 multiplicirt rc.

d) Die allgemein giltigen Grundsätze der vier Rechnungsarten kommen ebenfalls im I. Theile vor, worüber zur Erläuterung einige Beyspiele angeführt worden sind.

Das Geschäft des Lehrers besteht nun darinn, daß er die dort aufgestellten Grundsätze hier neuerdings in Erinnerung bringe, und dieselben zugleich mit Buchstaben bezeichne.

Im I. Theile §. 25. findet man z. B. den ersten Grundsatz „Gleiches zu Gleichem addirt giebt gleiche Summen", man bezeichne daher die gleichen Zahlen allgemein, entweder mit den nämlichen, oder auch verschiedenen Buchstaben:

wenn	$a = b$	oder	$a = a$
und	$c = d$		$b = b$
so ist auch	$a + c = b + d$	also ist auch	$a + b = a + b$

II.

Die Addition und Subtraction.

§. 45.

Lehrsätze in Absicht auf die Addition und Subtraction übereinstimmiger und entgegengesetzter Größen.

a) Größen, die bey ihrer Verbindung einander vermehren, sind übereinstimmig; z. B. eine Einnahme von 20 fl. und eine Einnahme von 10 fl., ferner eine Schuld von 100 fl., und eine Schuld von 200 fl. rc., weil die beiden ersten Größen zusammen eine Einnahme von 30 fl., und die beiden letzteren zusammen eine Schuld von 300 fl. geben, und sich somit diese Größen bey ihrer Verbindung vermehren.

b) Größen, die bey ihrer Verbindung einander so vermindern, daß die kleinere verschwindet, und von der

Bayerische Staatsbibliothek München

größeren nur so viel übrig bleibt, als ihr Ueberschuß beträgt, sind **entgegengesetzte Größen**; habe ich z. B. 600 fl. Vermögen, und 400 fl. Schulden, so besitze ich nur 200 fl. reines Vermögen, weil durch die Schuld von 400 fl. vom Vermögen gleichsam 400 fl. weggenommen werden, um dieselbe zu tilgen, und also nur mehr vom Vermögen 200 fl. übrig bleiben, daher sind diese beiden Größen Schulden und Vermögen, gleichwie Vor- und Rückwärtsgehen, Steigen und Fallen ꝛc. **entgegengesetzte Größen.**

Entgegengesetzte Größen sind **an sich**, und ausser ihrer Entgegensetzung in dem im I. Theile §. 78. bey b angegebenen Sinne gleichartige Größen; z. B. Schulden und Vermögen beziehen sich beide auf eine Summe Geldes, Vor- und Rückwärtsgehen auf eine bestimmte Bewegung ꝛc.

Nachstehende Lehrsätze, wo die eine Größe mit A, und ihr gleiches Gegentheil, d. h., die gleich große, aber ihr entgegengesetzte Größe mit n A ausgedrückt wird, sind von einem solchen Belange, daß der Anfänger ohne dieselben in der Buchstabenrechnung keine Fortschritte zu machen im Stande ist.

I. **Lehrsatz: Gleiche entgegengesetzte Größen heben einander auf**, d. h., $A + nA = o$.

Beweis: Entgegengesetzte Größen sind solche Größen, die sich bey ihrer Verbindung vermindern, wo also von der größeren gerade so viel aufgehoben wird, als die kleinere beträgt; sind nun beide **gleich**, so wird die erste durch die zweyte **ganz aufgehoben**, und es bleibt bey ihrer Verbindung nichts mehr übrig.

Wenn ich z. B. in einem Monate 50 fl. **einnehme**, und 50 fl. **ausgebe**, so bleibt mir von der eingenommenen Summe nichts mehr übrig; weil **Einnahme** und **Ausgabe** entgegengesetzte Größen sind, und also die Einnahme von 50 fl. durch eine eben so große Ausgabe von 50 fl. ganz aufgehoben wird, oder

50 fl. Einnahme + 50 fl. Ausgabe = 0.

Wird nun allgemein die erste Größe mit A, und die ihr entgegengesetzte aber gleich große durch nA ausgedrückt, so wird die Größe A durch die gleich große, aber ihr entgegengesetzte Größe ganz aufgehoben, es bleibt also nach vorgenommener Verbindung, wenn man nämlich A mit nA in eine Summe bringt, nichts mehr übrig, und deßhalb ist die Summe von A und nA gleich Null, oder

$$A + nA = 0.$$

II. Lehrsatz: Sind aber die entgegengesetzten Größen ungleich, dann ist

A) entgegengesetzte Größen addiren eben so viel, als eine der kleinere gleiche, aber mit der größeren übereinstimmige Größe von der letzteren, der größeren nämlich subtrahiren; und umgekehrt

B) von einer Größe eine andere kleinere subtrahiren, ist eben so viel, als der größeren das gleiche Gegentheil der kleineren addiren.

Beweis von A. 1) Die größere werde ausgedrückt durch 6A, und die kleinere ihr entgegengesetzte Größe durch 2nA;

2) Jede Größe ist sich selbst gleich, und jede Größe von sich selbst abgezogen giebt zum Reste Null, daher ist

$$6A = 6A, \text{ und}$$
$$2A - 2A = 0, \quad \text{oder}$$
$$0 = 2A - 2A;$$

3) Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches (I. §. 25. 1.),

$$6A = 6A$$
$$0 = 2A - 2A$$

daher ist $6A = 6A + 2A - 2A$;

4) Man setze $2nA = 2nA$ (I. §. 10. Nro. 1.), und addire wieder Gleiches zu Gleichem, man erhält abermal gleiche Summen,

$$6A = 6A + 2A - 2A$$
$$2nA = 2nA$$

also $6A + 2nA = 6A + 2A - 2A + 2nA$;

5) Gleiche entgegengesetzte Größen heben sich bey ihrer Verbindung auf (I. Lehrs.), daher ist $2A + 2nA = 0$, und die Null ändert nichts, man mag sie zu anderen Größen addiren, oder davon subtrahiren; um deswillen ist

$$6A + 2nA = 6A - 2A, \text{ d. h.},$$

zu einer Größe eine ihr entgegengesetzte kleinere addiren, ist eben so viel, als von der ersteren das gleiche Gegentheil der kleineren subtrahiren. Das gleiche Gegentheil zu $2nA$ ist $2A$, das ist, zu $2nA$ ist $2A$ die gleich große entgegengesetzte Größe, es ist also gleich viel, ob ich zu $6A$ die kleiner entgegengesetzte Größe $2nA$ addire, oder ob ich von $6A$ das gleiche Gegentheil von $2nA$, somit $2A$ subtrahire.

Es ist daher z. B. 6 fl. Vermögen + 2 fl. Schulden = 6 fl. Vermögen — 2 fl. Vermögen, d. h., es ist gleich viel, ob ich zum Vermögen von 6 fl. eine Schuld von 2 fl., die davon bezahlt werden muß, hinsetze, oder ob ich unmittelbar von diesem Vermögen 2 fl. wegnehme; indem in dem einen, wie in dem anderen Falle das Vermögen von 6 fl. um 2 fl. vermindert wird.

Beweis von B. 1) Wenn zwey Ausdrücke einander gleich sind, so ist es das Nämliche, welcher von beiden in der Gleichung zuerst geschrieben wird, wie der erste Ausdruck dem zweyten, so ist dann auch der zweyte dem ersten Ausdrucke gleich.

2) In Gemäßheit des so eben bey A angeführten Beweises ist $6A + 2nA = 6A - 2A$, daher ist auch

$$6A - 2A = 6A + 2nA, \text{ d. h.},$$

von einer Größe eine kleinere, mit ihr übereinstimmige subtrahiren, ist eben so viel, als ersterer das gleiche Gegentheil der letzteren addiren.

Habe ich z. B. in einem Jahre eine Einnahme von 800 fl., und es werden davon 200 fl. weggenom-

men, so bleiben nur noch 600 fl.; mache ich dagegen auf diese Einnahme ein Schuld von 200 fl., so wird dieselbe wieder, wie vorhin, um 200 fl. vermindert, oder 800 fl. Vermögen — 200 fl. Vermögen = 800 fl. Vermögen + 200 fl. Schulden.

III. Lehrsatz:

A) Von einer Größe eine ihr entgegengesetzte subtrahiren, ist eben so viel, als zur ersteren das gleiche Gegentheil der letzteren, mithin eine der letzteren gleiche mit der ersteren übereinstimmige Größe addiren; und umgekehrt

B) zu einer Größe eine andere addiren, ist eben so viel, als von ersterer das gleiche Gegentheil der letzteren subtrahiren.

Beweis von A. 1) Die eine Größe werde wieder durch 6 A, und die entgegengesetzte durch 2 n A ausgedrückt.

2) Jede Größe ist sich selbst gleich, daher ist

$$6\,A = 6\,A;$$

3) Gleiche entgegengesetzte Größen heben sich auf, daher ist

$$2A + 2nA = 0, \text{ oder}$$
$$0 = 2A + 2nA;$$

4) Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches,

$$6A = 6A$$
$$0 = 2A + 2nA$$

daher ist $6A = 6A + 2A + 2nA$;

5) Ferner setze man 2nA sich selbst gleich, und subtrahire Gleiches von Gleichem, so erhält man gleiche Reste (I. §. 34. I.),

$$6A = 6A + 2A + 2nA$$
$$2nA = 2nA$$

daher ist $6A - 2nA = 6A + 2A + 2nA - 2nA$;

6) Endlich giebt jede Größe von sich selbst abgezogen zum Reste Null, daher ist $2nA - 2nA = 0$, und deßhalb

$$6A - 2nA = 6A + 2A, \text{ d. h.,}$$

von einer Größe eine ihr entgegengesetzte Größe subtrahiren, ist eben so viel, als eine der letztern gleiche, mit der ersteren übereinstimmige Größe addiren.

Um deswillen ist z. B. 6 fl. Vermögen — 2 fl. Schulden = 6 fl. Vermögen + 2 fl. Vermögen.

Beweis von B. Weil 6A — 2nA = 6A + 2A, so ist auch umgekehrt

6A + 2A = 6A — 2nA, d. h.,

zu einer Größe eine andere addiren, ist eben so viel, als vor ersterer das gleiche Gegentheil der letzteren subtrahiren.

Daher ist z. B. 50 fl. Vermögen + 30 fl. Vermögen = 50 fl. Vermögen — 30 fl. Schulden.

I. Zusatz: Aus dem so eben Gesagtem geht hervor, daß man von zwey entgegengesetzten Größen die eine als die zu addirende, die andere als die zu subtrahirende betrachten, mithin die erste positiv nennen, und durch das Additionszeichen (+) darstellen, und letztere Größe negativ heißen, und ihr das Subtractionszeichen vorsetzen könne.

II. Zusatz: Gleichartige Größen, wovon einer das Zeichen (+), und der anderen das Zeichen (—) vorangesetzt ist, stehen in einem Verhältnisse, wie entgegengesetzte Größen, und können als solche behandelt werden.

Bey positiven Größen, wenn sie im Anfange stehen, wird gewöhnlich das Zeichen (+) weggelassen; so oft demnach Größen vorkommen, die im Anfange stehen, und welchen kein Zeichen vorangesetzt ist, so sind dieselben allezeit positive Größen, denen das Zeichen (+) zukömmt, und also da hingedacht werden muß.

Man sagt von einem Ausdrucke, er habe so viele Glieder, als viele Theile er hat, die durch die Zeichen (+) oder (–) mit einander verbunden sind. Ein Ausdruck, der nur ein Glied hat, heißt einfach, der aber aus zwey, drey, oder mehreren Gliedern besteht, heißt zweytheilig, dreytheilig, oder überhaupt mehrtheilig, oder zusammengesetzt; die einfachen Ausdrücke werden auch eingliedericht, und

die zusammengesetzten zwey-, drey-, oder überhaupt mehrgliedericht genannt, je nachdem bey den letzteren zwey, drey, oder mehrere Glieder vorkommen.

Anmerkung: Bey den zusammengesetzten Größen bedient man sich der Deutlichkeit wegen öfters der Einklammerungszeichen (), was schon im I. Theile §. 45. bey f bemerkt wurde.

§. 46.

Lehrsätze, welche bestimmen, wie die Summe mehrerer Größen zu einer anderen addirt oder davon subtrahirt, oder wie zu einer Differenz eine andere Größe addirt, oder davon subtrahirt werden soll.

Gleichwie in der Gemeinen Arithmetik ungleichartige Größen weder zu einander addirt, noch von einander subtrahirt werden können, eben so können auch in der Buchstabenrechnung die Größen, welche mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet sind, nicht unmittelbar addirt, oder von einander subtrahirt werden; um deswillen drückt man in solchen Fällen die vorzunehmende Addition oder Subtraction durch die bekannten Zeichen aus, wo z. B. die Ausdrücke $(a + b)$, oder $(a - b)$ ꝛc. die Summe oder die Differenz zweyer Größen bezeichnen.

Der Ausdruck $(a + b)$ heißt demnach eben so viel, als es sollen die beiden Zahlen, welche durch a und b ausgedrückt werden, addirt werden, und der Ausdruck $(a - b)$ zeigt an, es soll die Zahl, welche der Buchstabe b bezeichnet, von jener, welche mit a ausgedrückt ist, subtrahirt werden.

Setzt man anstatt der Buchstaben bestimmte Zahlen, so kann dann die wirkliche Addition oder Subtraction vorgenommen werden; z. B. $9 + 4 = 13$, oder $9 - 4 = 5$.

Nachstehende Lehrsätze enthalten die Regeln, wie von einer solchen Differenz eine andere Größe subtrahirt, oder dazu addirt, wie auch, wie die Summe mehrerer Größen von einer anderen subtrahirt, oder dazu addirt werden müsse.

I. Lehrsatz: Einer Größe wird ein Ganzes, oder die Summe mehrerer Größen addirt, oder davon subtrahirt, wenn man das Ganze auf einmal, oder alle Theile einzeln in beliebiger Ordnung nach einander addirt oder subtrahirt.

Beweis: 1) Alle Theile zusammen geben das Ganze (I. §. 10. Nro. 2.); weil nun jene Größe, welche den übrigen zusammengenommen gleich ist, die Summe genannt wird, so ist diese letztere allezeit allen Summanden zusammengenommen gleich.

2) Die Summanden geben immer die nämliche Summe, man mag sie in was immer für einer Ordnung addiren; es ist daher z. B. $2 + 3 + 4 = 9$, ferner $3 + 2 + 4 = 9$ ꝛc.

3) Es ist also gleich viel, ob man die ganze Summe auf einmal, oder alle Summanden nach einander in einer beliebigen Ordnung, zu einer anderen Größe addirt, oder davon subtrahirt; drückt daher a diese letztere Größe aus, und $(b + c)$ die Summe zweyer anderen Größen, so ist $a + (b + c) = a + b + c = a + c + b$, und $a - (b + c) = a - b - c = a - c - b$; im ersten Falle hat man zu a die ganze Summe $(b + c)$, im zweyten hingegen die beiden Summanden in beliebiger Ordnung addirt und subtrahirt. Um deswillen ist z. B. $12 + (4 + 3) = 12 + 7 = 19$, ferner $12 + (4 + 3) = 12 + 4 + 3 = 19$, und $12 + (4 + 3) = 12 + 3 + 4 = 19$; eben so ist $24 - (7 + 4) = 24 - 11 = 13$, ferner $24 - (7 + 4) = 24 - 7 - 4 = 13$, und $24 - (7 + 4) = 24 - 4 - 7 = 13$.

II. Lehrsatz: Der Differenz zweyer Größen wird eine andere addirt, wenn man letztere entweder dem Minuend addirt, oder vom Subtrahend abzieht.

Beweis: 1) Der Rest wird beym unveränderten Subtrahend um so viel größer, als man den Minuend vermehrt;

2) Der Rest wird ebenfalls, im Falle der Minuend unverändert bleibt, um so viel größer, als man den Subtrahend vermindert.

3) Daher wird dem Reste allezeit die gegebene Größe dadurch addirt, daß man dieselbe entweder zum Minuend addirt, oder vom Subtrahend abzieht.

Drückt man den Minuend durch a, den Subtrahend durch b, und jene Zahl, die man addiren soll, durch c allgemein aus, so ist dann (a — b) die Differenz, welcher die Zahl c addirt werden soll, weßhalb $(a - b) + c = (a + c) - b$, oder $(a - b) + c = a - (b - c)$; daher ist z. B. $(12 - 8) + 4 = (12 + 4) - 8 = 16 - 8 = 8$, oder $(12 - 8) + 4 = 12 - (8 - 4) = 12 - 4 = 8$.

III. Lehrsatz: Von der Differenz zweyer Größen wird eine andere abgezogen, wenn man letztere vom Minuend abzieht, oder dem Subtrahend addirt.

Beweis: 1) Wird die gegebene Größe vom Minuend abgezogen, so wird der Rest beym nämlichen Subtrahend um eben so viel kleiner werden.

2) Wird aber diese Größe zum Subtrahend addirt, so wird, im Falle der Minuend nicht verändert wird, der Rest, indem der Subtrahend um diese Größe vermehrt worden ist, um eben diese Größe kleiner, und somit dieselbe davon subtrahirt worden seyn.

Wenn man den Minuend überhaupt durch a, den Subtrahend durch b, und die von der Differenz dieser beiden abzuziehende Größe durch c ausdrückt, so ist dem Gesagten gemäß $(a - b) - c = (a - c) - b$, und $(a - b) - c = a - (b + c)$.

Um deswillen ist z. B. $(20 - 4) - 3 = (20 - 3) - 4 = 17 - 4 = 13$, und $(20 - 4) - 3 = 20 - (4 + 3) = 20 - 7 = 13$.

§. 47.

Regel der Addition für jenen Fall, wo die die Summanden einfache Größen sind.

a) Sind die Größen gleichartig, und haben sie gleiche Zeichen, so werden sie dadurch addirt, daß man sie zusammenzählet, d. h., ihre Coefficienten addirt, und der Summe das nämliche Zeichen giebt.

b) Sind die Größen gleichartig, nnd haben sie ungleiche Zeichen, so werden sie dadurch addirt, daß man die kleinere von der größeren abzieht, und dem Reste das Zeichen der größeren giebt.

c) Sind endlich die Größen ungleichartig, so können sie nicht addirt, d. h., zu einem Ganzen verbunden werden, man setzt sie also mit ihren Zeichen unverändert hin.

Es versteht sich von selbst, daß die Coefficienten, im Falle sie Brüche sind, nach den im II. Theile bey den gemeinen Brüchen aufgestellten Regeln addirt und subtrahirt werden müssen.

I. Beyspiel:

Es soll zur Größe $+ 8a$ die Größe $+ 4a$ und dann zur Größe $- 8a$ die Größe $- 2a$ addirt werden.

Auflösung:

1) Die beiden Größen $+ 8a$ und $+ 4a$, ferner $- 8a$ und $- 4a$ sind gleichartig, und haben gleiche Zeichen, man addirt sie also dadurch, daß man ihre Coefficienten in eine Summe bringt, und der Summe jenes Zeichen giebt, welches die Summanden haben; weßhalb nun

$$+ 8a + 4a = + 12a, \text{ und}$$
$$- 8a - 4a = - 12a.$$

II. Beyspiel:

Zu $+ 6ab$ soll man $- 4ab$, und zu $- 6ab$ soll man $+ 4ab$ addiren.

Auflösung:

Die beiden Größen $+ 6ab$ und $- 4ab$, ferner $- 6ab$ und $+ 4ab$ sind gleichartig, und haben verschiedene Zeichen, sie werden also dadurch addirt, daß man beiderseits die kleinere von der größeren abzieht, und dem Reste das Zeichen der größeren giebt; daher ist

$+ 6ab - 4ab = + 2ab$, und

$- 6ab + 4ab = - 2ab$.

III. Beyspiel:

Man soll zu $+ 6a$ die Größen $+ 4m$ und $- 7f$ addiren.

Auflösung:

Diese Größen sind ungleichartig, man schreibt sie also unverändert mit ihren Zeichen neben einander, man erhält $+ 6a + 4m - 7f$ als die verlangte Summe.

§. 48.

Regel der Addition für jenen Fall, wo die Summanden zusammengesetzte Größen sind.

1) Es giebt in der Buchstabenrechnung keinen Localwerth, indem z. B. $(a + b) = (b + a)$, oder $(a - b) = (- b + a)$ ꝛc. daher könnte man die einzelnen Glieder der Summanden beliebig unter einander, oder auch neben einander schreiben; indessen ist es aber, im Falle man die Summanden noch einmal anschreiben will, bequem, wenn man die Summauden so anschreibt, daß die gleichartigen Größen unter einander zu stehen kommen, und dann unten, um die Summanden von der Summe zu trennen, einen Strich zieht. Gewöhnlich addirt man aber die Summanden, wie dieses z. B. bey der Multiplication der Fall ist, gleich so,

wie sie da stehen, ohne daß man sie auf die erwähnte Weise unter einander schreibt.

2) Man fange die Addition, indem die Größen von der Stelle, wo sie stehen, keinen Werth erhalten, und wir von der Linken zur Rechten schreiben und lesen, zur linken Seite an, und nehme dieselbe der Ordnung nach von der Linken zur Rechten nach den im vorigen §. aufgestellten Regeln vor.

3) Kommen in einigen Gliedern Zahlziffern ohne Buchstaben vor, so werden dieselben nach dem nämlichen so eben aufgestellten Regeln behandelt, wo die unbenannten Zahlen immer gleichartig und die benannten es nur dann sind, wenn sie gleichnamige Dinge bezeichnen.

I. Beyspiel:

Es seyen die beiden zusammengesetzten Größen „$+ 5a + 4b - 12ab + 2d - e - m$ und $+ 3a - 2b + 8ab - 6d - f - 3m$ in eine Summe zu bringen.

Auflösung:

a) Man schreibe diese beiden Summanden so unter einander, daß die gleichartigen Größen unter einander zu stehen kommen, wo dann das Zeichen ($+$) im Anfange nicht geschrieben wird:

$$\text{Summanden}\begin{cases} 5a + 4b - 12ab + 2d - e - m \\ 3a - 2b + 8ab - 2d + f - 3m \end{cases}$$

b) 1) Die beiden Größen $+ 5a$ und $+ 3a$, oder kürzer $5a$ und $3a$ sind gleichartig, und haben gleiche Zeichen, sie werden also dadurch addirt, daß man ihre Coefficienten in eine Summe bringt. Es ist aber $5 + 3 = 8$; daher auch $5a + 3a = 8a$. Diese Summe schreibt man links unter den Strich ohne das Zeichen ($+$), welches im Anfange verstanden wird;

2) $+ 4b$ und $- 2b$ sind gleichartige Größen mit verschiedenen Zeichen; es ist daher $+ 4b - 2b = + 2b$;

3) — 12ab und + 8ab sind ebenfalls gleichartige Größen mit verschiedenen Zeichen, daher ist — 12ab + 8ab = — 4ab;

4) + 2d und — 2d sind gleichartige Größen mit verschiedenen Zeichen, und haben gleiche Coefficienten, sie sind also gleiche entgegengesetzte Größen, die sich ganz aufheben; daher ist + 2d — 2d gleich Null, welche nicht angeschrieben wird.

5) — e und + f sind ungleichartig, man erhält also zur Summe — e + f, oder + f — e.

6) — m und — 3m sind gleichartig und haben gleiche Zeichen; daher ist — m — 3m = — 4m.

Um deswillen erhält man nachstehende Summe:

$$\text{Summanden}\begin{cases}5a + 4b - 12ab + 2d - e - m\\ 3a - 2b + 8ab - 2d + f - 2m\end{cases}$$

$$\text{Summe} = 8a + 2b - 4ab - e + f - 3m$$

II. Beyspiel:

Es seyen nachstehende 4 Summanden zu addiren

1) $4ab - 8cd + fm - 8x + 49 + 12$

2) $- 8ab + 8cd - 4fm + 7x\ 59 - 9$

3) $20x - 16y + 16ab + 12fm - 4cd + 30$

4) $15cd + 18 + 40x + 7f + 4g - 3q.$

Auflösung:

1) Will man sich die Mühe geben, daß man diese Summanden noch einmal anschreibt, so schreibt man dann die gleichartigen Glieder unter einander, um sich dadurch die Addition zu erleichtern; geschieht dieses nicht, wie es z. B. bey der Multiplication zusammengesetzter Größen der Fall ist, so hat man darauf zu sehen, daß man jederzeit in allen Summanden die gleichartigen Größen zusammen sucht.

2) Man fange die Addition zur linken Seite etwa mit dem ersten oben stehenden Gliede 4ab an, und zähle dazu alle jene Glieder, die damit gleichartig sind, und zugleich mit + 4ab das nämliche Zeichen haben, und streiche der Deutlichkeit wegen mittels einer durch das Glied gezogenen Linie die zur Addition genommenen Glieder aus; eben so verfahre man bey

jenen Gliedern, die mit $-8ab$ gleichartig sind, und damit gleiche Zeichen haben, man erhält $+20ab$ als die Summe der positiven Glieder, und $-8ab$ als die Summe der negativen, indem zu $-8ab$ kein gleichartiges Glied mehr mit dem nämlichen Zeichen vorhanden ist, und $+4ab+16ab=+20ab$.

Ferner zieht man jetzt die kleinere Summe von der größeren ab, und giebt dem Reste das Zeichen der größeren, es ist $+20ab-8ab=+12ab$, d. h., die Summe aller positiven und negativen Glieder, welche mit $+4ab$ gleichartig sind, ist gleich $+12ab$; wird nun dieses Glied im Anfange geschrieben, so läßt man das Zeichen (+) wieder weg.

Verfährt man auf diese Weise bey allen übrigen Gliedern, die gleichartig sind, so erhält man nachstehende Summen:

a) $-8cd+8cd-4cd+15cd=-12cd+23cd=+23cd-12cd=+11cd$;

b) $+fm-4fm+12fm=+13fm-4fm=+9fm$;

c) $-8x+7x+40x=-8x+47x=+47x-8x=+39x$;

d) $+4y+5y-16y=+9y-16y=-16y+9y=-7y$;

e) $+12-9+30+18=+60-9=+51$.

2) Die auf diese Weise erhaltenen Partialsummen $+12ab$, $+11cd$, $+9fm$ ꝛc. setze man, indem sie von der Stelle, wo sie stehen, keinen neuen Werth erhalten, in einer beliebigen Ordnung unter den Strich, und schreibe dazu unverändert mit ihren Zeichen jene Glieder, zu welchen in den gegebenen Summanden keine gleichartigen vorhanden sind, man erhält die Totalsumme, d. h., jene Größe, die allen Summanden zusammen genommen gleich ist:

Summanden

$$4ab - 8cd + fm - 8x + 4y + 12$$
$$-8ab + 8cd - 4fm + 7x + 5y - 9$$
$$-20x - 16y + 16ab + 12fm - 4cd + 30$$
$$15cd + 18 + 40x + 7f + 4g - 3q$$

Summe $= 12ab + 15cd + 9fm - 7y + 51 + 7f + 4g - 3q.$

III. Beyspiel:

Jemand hat in der ersten Woche 18 baierische oder Konventions-Thaler eingenommen, und 24 fl. 30 kr. 4 Häller ausgegeben, und in der zweyten 12 baier. Thaler ausgegeben, und 15 fl. 40 kr. 2 Häller eingenommen.

Um wie viel wird nun die Einnahme von der Ausgabe, oder diese von jener übertroffen?

Auflösung:

1) Weil die Einnahmen und Ausgaben entgegengesetzte Größen sind, so bezeichne man die ersteren mit dem Zeichen (+), und die letzteren mit dem Zeichen (—), indem jene wie positive, und diese wie negative Größen betrachtet werden können.

2) Eine negative Größe zu einer positiven addiren, ist eben so viel, als das gleiche Gegentheil der ersteren von der letzteren subtrahiren; es werden also die Ausgaben dadurch von den Einnahmen subtrahirt, daß man erstere als negative Größen zu den letzteren addirt (§. 45. II. Lehrs.)

3) Man lasse demnach die Benennungen „Einnahme, Ausgabe" weg, schreibe dagegen die Zeichen (+ oder —), und nehme dann den aufgestellten Regeln gemäß die Addition vor, wo man offenbar sehen wird, daß die Größen „baier. Thaler und wieder solche Thaler, ferner Gulden und wieder Gulden ꝛc. in dem hier angegebenen Sinne gleichartig sind, da dieselben nach den im I. Theile aufgestellten Begriffen gleichartig und gleichnamig sind. Man erhält auf diese Weise nachstehende Summe:

Sum-

Summanden	18 b. Thlr.	— 24 fl.	— 30 kr.	— 4 Häll.
	— 12 b. Thlr.	+ 15 fl.	+ 40 kr.	+ 2 Häll.
Summe =	6 b. Thlr.	— 9 fl.	+ 10 kr.	— 2 Häll.

4) Zu einer Größe eine negative addiren ist eben so viel, als das gleiche Gegentheil der letzteren von der ersteren subtrahiren; daher erhält man, daß 6 b. Thlr. — 9 fl. = 2 b. Thlr. 9 fl. 36 kr. — 9 fl. = 2 b. Thlr. 36 kr., und 10 kr. — 2 Häll. = 9 kr. 6 Häll., weßhalb auch 6 b. Thlr. — 9 fl. + 10 kr. — 2 Häll. = 2 b. Thlr. 36 kr. + 9 kr. 6 Häll. = 2 b. Thlr. 45 kr. 6 Häll.

Es übertrifft also in diesem Beyspiele die Einnahme die Ausgabe um 2 b. Thlr. 45 kr. 6 Häll.

Das nämliche Resultat erhält man, wenn man nach den im I. Theile §. 98. aufgestellten Regeln die gesammte Ausgabe von der ganzen Einnahme subtrahirt.

§. 49.

Regel der Subtraction.

1) Man schreibe, weil einmal diese Ordnung in der gemeinen Arithmetik eingeführt wurde, den Subtrahend unter den Minuend, wiewohl auch dieser unter jenem stehen dürfte, und ziehe unten eine Linie.

2) Man verändere im Subtrahend die Zeichen, und addire dann den Subtrahend zum Minuend, indem man nach den im Subtrahend veränderten Zeichen die an der Stelle des Minuends und Subtrahends stehenden Größen als Summanden betrachtet.

I. Beyspiel:

Es soll von $6a + 6b - 8d + f - m + 48$ die zusammengesetzte Größe $12a - 4b + 20d + 4f + n - 12$ subtrahirt werden.

Auflösung:

1) Man schreibe den Subtrahend unter den Minuend, und ziehe unten eine Linie:

Minuend	$6a$	$+ 6b$	$- 8d$	$+ f$	$- m$	$+ 48$
Subtrah.	$12a$	$- 4b$	$+ 20d$	$+ 4f$	$+ n$	$- 12$

2) Man verändere in allen Gliedern des Subtrahends die Zeichen, und nehme dann den im vorigen §. aufgestellten Regeln gemäß die Addition von der Linken zur Rechten vor, man erhält dann nachstehenden Rest:

Min.	$6a$	$+ 6b$	$- 8d$	$+ f$	$- m$	$+ 48$
Subtr.	$12a$	$- 4b$	$+ 20d$	$+ 4f$	$+ n$	$- 12$
	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

$$\text{Rest} = -6a + 10b - 28d - 3f - m - n + 60$$

II. Beyspiel:

Es soll von $48 - 20 + 4 - 6 + 3$ die zusammengesetzte Größe $- 18 + 30 - 6 + 12 - 9$ subtrahirt werden.

Auflösung:

1) Man schreibe den Subtrahend unter den Minuend, und ziehe unten eine Linie:

Minuend	48	$- 20$	$+ 4$	$- 6$	$+ 3$
Subtrahend	$- 18$	$+ 30$	$- 6$	$+ 12$	$- 9$

2) Man verändere im Subtrahend alle Zeichen, und addire dann diesen zum Minuend:

Minuend	48	$- 20$	$+ 4$	$- 6$	$+ 3$
Subtrahend	$- 18$	$+ 30$	$- 6$	$+ 12$	$- 9$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
Rest $=$	66	$- 50$	$+ 10$	$- 18$	$+ 12$

Man erhält hinsichtlich des Werthes den nämlichen Rest, wenn man, da hier alle Glieder gleichartig sind, den Minuend und eben so den Subtrahend durch eine einzige Zahl ausdrückt, und dann die Subtraction vornimmt.

Es ist $48 - 20 + 4 - 6 + 3 = 55 - 26 = 29$, und $- 18 + 30 - 6 + 12 - 9 =$

— 33 + 42 = 42 — 33 = 9, daher ist auch (48 — 20 + 4 — 6 + 3) — (— 18 + 30 — 6 + 12 — 9) = 29 — 9 = 20, und der gefundene Rest 66 — 50 + 10 — 18 + 12 ist = 88 — 68, mithin ebenfalls = 20.

§. 50.

Die Gründe des Verfahrens, wie auch die Probe in Absicht auf die Addition und Subtraction.

A) Grund des Verfahrens, die Addition betreffend.

a) Sind die Größen gleichartig, und haben sie gleiche Zeichen, so sind dieselben unter sich übereinstimmige Größen, die bey ihrer Verbindung einander vermehren, und machen also allezeit als Theile ein Ganzes von der nämlichen Beschaffenheit aus, oder das Ganze bekömmt hier immer das Zeichen seiner Theile, d. h., man giebt der Summe jenes Zeichen, das die Summanden haben.

Gleichwie + 4a + 2a = + 6a, und — 4a — 2a = — 6a, eben so ist auch z. B. 4 fl. Vermögen + 2 fl. Vermögen = 6 fl. Vermögen, ferner 4 fl. Schulden + 2 fl. Schulden = 6 fl. Schulden.

b) Sind die Größen gleichartig, und haben sie verschiedene Zeichen, so sind die Summanden entgegengesetzte Größen, sie werden also dadurch addirt, daß man die kleinere von der größeren subtrahirt, wo offenbar der Rest das Zeichen der größeren erhält (§. 45. II. Lehrsatz).

c) Sind endlich die Größen ungleichartig, so können sie nicht wirklich addirt, d. h., sie können nicht zu einem Ganzen verbunden werden, man setzt sie also mit ihren Zeichen unverändert neben einander.

Ist in diesem Falle die zu addirende Größe positiv, so setzt man sie mit dem Zeichen (+) zu der mit ihr ungleichartigen Größe hin, wodurch dann ausge-

drückt wird, daß eine zur anderen addirt werden soll; ist aber dieselbe negativ, so setzt man sie zur anderen Größe mit dem Zeichen (—) hin, wodurch im Grunde wieder die Addition ausgedrückt wird, weil eine negative Größe dadurch addirt wird, daß man das gleiche Gegentheil derselben subtrahirt (§. 45. II. Lehrs.).

Daher ist z. B. a und b = a + b, ferner a und — b = a — b; und (a + b) wie auch (a — b) drückt beiderseits die verlangte Summe der beiden gegebenen Summanden aus.

B) Die Subtraction betreffend.

Den aufgestellten Regeln gemäß werden im Subtrahend alle Zeichen verändert, und dann die an der Stelle des Minuends und Subtrahends stehenden Größen addirt.

Dadurch werden alle im Subtrahend vorkommenden positiven Größen in negative, und diese in positive verändert, und somit jede Größe des Subtrahends in die entgegengesetzte gleiche Größe verwandelt, und dann zu den im Minuend vorkommenden Größen addirt.

Eine Größe von einer anderen subtrahiren, ist aber eben so viel, als das gleiche Gegentheil des Subtrahends zum Minuend addiren; es geschieht also wirklich dadurch die verlangte Subtraction, daß man den Subtrahend nach veränderten Zeichen zum Minuend addirt.

Was die Probe betrifft, so wird diese in der Buchstaben-Rechnung eben so gemacht, wie in der gemeinen Arithmetik.

Addirt man nämlich noch einmal alle Summanden mit Ausnahme eines einzigen zusammen, und subtrahirt man diese Summe von der zuerst erhaltenen Summe, so muß, im Falle die Rechnung richtig ist, der ausgeschlossene Summand als Rest zum Vorscheine kommen, und man hat dadurch die Probe hinsichtlich der vorgenommenen Addition gemacht.

Eben so wird die Probe in Betreff der Subtraction gemacht, wenn man den Rest zum Subtrahend addirt; wobey aber zu bemerken ist, daß die Theile des Subtrahends bey dieser Addition die anfangs da gewesenen und also nicht die neuen Zeichen haben müssen, welche letztere man dadurch erhält, daß man im Subtrahend alle Zeichen verändert.

I. Zusatz: Die Differenz $(a - b)$ kann auch als eine Summe betrachtet werden, wo dann der zweyte Summand $(- b)$ eine negative Größe ist; indem die Differenz $(a - b)$ ausdrückt, die Größe b soll von a subtrahirt werden, und dieses eben so viel ist, als das gleiche Gegentheil von b, somit $- b$ zu a addiren.

II. Zusatz: Den hier aufgestellten Regeln gemäß kann man die größere Zahl von der kleineren subtrahiren, was nach den Regeln der gemeinen Arithmetik nicht geschehen kann (I. §. 37. 1 Anm.). Ist nämlich bey Zahlziffern der Subtrahend größer als der Minuend, so subtrahirt man umgekehrt den Minuend vom Subtrahend, und giebt dem Reste das Zeichen (—), oder was eines ist, man verändert im Subtrahend das Zeichen, und addirt, indem man die kleinere Zahl von der größeren abzieht, und dem Reste das Zeichen der größeren giebt.

Daher ist z. B. $18 - 24 = - 6$, oder $18 - 24 = - (24 - 18) = - 6$; wo dann der Rest zum Subtrahend addirt ebenfalls wieder den Minuend giebt, indem $24 + (- 6) = 24 - 6 = 18$.

III.

Von der decadischen Ergänzung.

§. 51.

Begriff von der decadischen Ergänzung.

a) Eine Zahl, welche zu einer gegebenen Zahl addirt die nächsthöhere Einheit zur Summe giebt, heißt

die decadische Ergänzung (Complementum arithmeticum) dieser Zahl.

Unter der nächsthöheren Einheit versteht man immerhin diejenige Zahl, die um eine Stelle mehr hat, als die gegebene Zahl, und nur aus 1 sammt angehängten Nullen besteht, die somit zum höchsten Ziffer 1 und nach diesem so viele Nullen hat, als die gegebene Zahl Ziffern enthält.

Daher ist z. B. 3 die decadische Ergänzung zu 7, weil $7 + 3 = 10$, und somit 3 zu 7 addirt die nächsthöhere Einheit zur Summe giebt; eben so ist 25 zu 75, dann 616 zu 384, ferner 7,0584886 zu 2,9415114, und 0,3487034 zu 9,6512966 ꝛc. die decadische Ergänzung, weil $75 + 25 = 100$, dann $384 + 616 = 1000$, ferner $2,9415114 + 7,0584886 = 10$, und $9,6512966 + 0,3487034 = 10$ ꝛc.

Der Kürze wegen nehme man von den latein. Substantiven „Numerus, Complementum, Unitas“ den ersten Buchstaben, und drücke somit die gegebene Zahl mit N, die decadische Ergänzung mit C, und die nächsthöhere Einheit mit U aus, so erhält man diese Gleichung „$N + C = U$“, d. h., die decadische Ergänzung zur gegebenen Zahl addirt giebt die nächsthöhere Einheit.

§. 52.

Aufgabe, zu einer gegebenen Zahl die decadische Ergänzung zu finden, wie auch mittels derselben eine Zahl von einer anderen abzuziehen.

Auflösung:

A) Man subtrahire die gegebene Zahl von der nächsthöheren Einheit, der Rest ist dann die verlangte decadische Ergänzung zu dieser Zahl.

B) Um aber mittels der decadischen Ergänzung eine Zahl von einer anderen abzuziehen, so addire man die decadische Ergänzung des Subtra-

hends zum Minuend, und subtrahire von dieser Summe die nächsthöhere Einheit.

Beweis von A.

1) In Gemäßheit des vorigen §. ist

$$N + C = U;$$

2) Jede Größe ist sich selbst gleich, und Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt wieder Gleiches:

$$\begin{array}{r} N + C = U \\ N = N \\ - \quad - \\ \hline \end{array}$$

daher ist $C = U - N.$

Man erhält also jederzeit die decadische Ergänzung, wenn man von der nächsthöheren Einheit die gegebene Zahl subtrahirt.

Beweis von B.

1) Dem Gesagten gemäß ist

$$\begin{array}{r} N + C = U \\ C = C \\ - \quad - \\ \hline \end{array}$$

also auch $N = U - C.$

2) Ferner ist jede Größe sich selbst gleich, und Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches, daher ist

$$\begin{array}{l} A = A \\ N = U - C \\ - \quad - \; + \\ \hline \end{array}$$

also auch $A - N = A - U + C = (A + C) - U.$

Es wird also eine Zahl von einer anderen auch dadurch subtrahirt, daß man die decadische Ergänzung des Subtrahends zum Minuend addirt, und davon die nächsthöhere Einheit subtrahirt.

Beyspiel zu A.

Es soll zu 4625 die decadische Ergänzung gefunden werden.

Auflösung:

Zu dieser Zahl, welche aus vier Ziffern besteht, ist 1 mit vier Nullen, somit 10000 die nächsthöhere Einheit, man subtrahire also 4625 von 10000, man erhält zum Reste, mithin als die gesuchte decadische Ergänzung die Zahl 5375, indem 4625 + 5375 = 10000; oder

$$U = 10000 \qquad \text{und} \qquad N = 4625$$
$$N = 4625 \qquad\qquad\qquad C = 5375$$

$$\text{also } U - N = 5375 = C, \text{ daher } N + U = 10000 = U.$$

Diese Subtraction kann man vornehmen, ohne daß man die Zahl 10000 anschreibt; man zieht nämlich, da der Subtrahend 10000 nur aus 1 und Nullen besteht, das letzte Ziffer der gegebenen Zahl von 10 und die übrigen Ziffern derselben von 9 ab.

Beyspiel zu B.

Es soll von 5645 die Zahl 3494 subtrahirt werden.

Auflösung:

Zu 3494 ist 6506 die decadische Ergänzung, diese zum Minuend addirt giebt zur Summe 12151, davon subtrahirt man die nächsthöhere Einheit 10000, man erhält 2151 als den verlangten Rest, welchen man auch findet, wenn man die Zahl 3494 von 5645 unmittelbar subtrahirt, indem 5645 — 3494 = 2151.

Es ist nämlich in diesem Beyspiele

$$A = 5645$$
$$C = 6506$$

$$\text{also} \quad A + C = 12151$$
$$\text{ferner} \quad U = 10000$$

$$\text{daher ist } (A + C) - U = 2151 = A - N.$$

Anmerkung: Wie dasjenige, was so eben in Absicht auf die decadische Ergänzung gesagt wurde, benützt werden kann, wird in der Folge gezeigt werden.

IV.

Von der Multiplication und Division.

§. 53.

Einige Lehrsätze in Absicht auf die Multiplication und Division.

I. Lehrsatz: Die Summe zweyer oder mehrerer Größen wird durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt, wenn man jede einzelne Größe multiplicirt oder dividirt, und am Ende die Producte oder Quotienten addirt; d. h.,

$(a + b + c) \times x = ax + bx + cx$, und

$(a + b + c) : m = a : m + b : m + c : m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$

Beweis: 1) Alle Theile zusammen geben das Ganze.

2) Es wird also die Summe zweyer oder mehrerer Größen durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt, wenn man jeden Summanden multiplicirt oder dividirt, und am Ende die einzelnen Producte oder Quotienten addirt.

Es ist daher z. B. $(4 + 5 + 6) \times 3 = 12 + 15 + 18 = 45$, und $(8 + 6 + 12) : 2 = 4 + 3 + 6 = 13$.

II. Lehrsatz: Eine Größe wird mit der Summe zweyer oder mehrerer Zahlen multiplicirt, wenn man sie mit jeder einzelnen Zahl multiplicirt, und am Ende die Producte addirt; d. h.,

$$x \times (a + b + c) = ax + bx + cx.$$

Beweis: Weil alle Theile zusammen das Ganze geben, so wird offenbar die gegebene Größe mit dem ganzen Multiplicator multiplicirt, wenn man sie mit jedem einzelnen Theile desselben multiplicirt, und am Ende die Producte addirt.

Es ist demnach z. B. $8 \times (3 + 4 + 5) = 24 + 32 + 40 = 96$.

III. Lehrsatz: Die Differenz zweyer Größen wird durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt, wenn man jede einzelne Größe damit multiplicirt oder dividirt, und am Ende die Producte oder die Quotienten subtrahirt; d. h.,

I. $(a - b) \times n = an - bn$, und

II. $(a - b) : n = a : n + b : n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}$

Beweis von I. 1) Man setze $a - b = d$, und addire beiderseits b, so ist ist $a = b + d$, oder

$$\begin{array}{rl} a - b &= d \\ b &= b \\ \hline \end{array}$$

also ist $a = b + d$

2) Nun setze man n sich selbst, und multiplicire auf beiden Seiten:

$$\begin{array}{rl} a &= b + d \\ n &= n \\ \hline \end{array}$$

daher ist $an = bn + dn$

3) Man setze bn sich selbst gleich, und subtrahire auf beiden Seiten:

$$\begin{array}{rl} an &= bn + dn \\ bn &= bn \\ - & \quad - \\ \hline \end{array}$$

also ist $an - bn = dn$

4) Anstatt d setze man wieder $a - b$, so ist $dn = (a - b)\, n$, und daher $(a - b) \times n = an - bn$.

Beweis von II. Der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt oder umgekehrt der Quotient mit dem Divisor multiplicirt giebt den Dividend wieder (I. §. 61. Zus. I.); nun ist aber $(\frac{a}{n} - \frac{b}{n}) \times n = a - b$ (I. §. 63. Zus. II.).

Es wird also die Differenz zweyer Größen durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt, wenn man sowohl den Minuend als auch den Subtrahend damit multiplicirt oder dividirt, und am Ende das zweyte Product oder den zweyten Quotienten vom ersten subtrahirt.

Es ist daher z. B. $(8 - 6) \times 3 = 24 - 18 = 6$, und $(12 - 8) : 4 = 3 - 2 = 1$.

IV. Lehrsatz: Eine Größe wird mit der Differenz zweyer Zahlen multiplicirt, wenn man sie mit dem Minuend und Subtrahend multiplicirt, und am Ende das zweyte Product vom ersten subtrahirt; d. h.,

$a \times (m - n) = am - an.$

Beweis: 1) Man setze $m - n = d$, so ist $m = d + n$, oder

$$\begin{array}{r} m - n = d \\ n = n \\ \hline \end{array}$$

also ist $m = d + n$

2) Man setze a sich selbst gleich, und multiplicire Gleiches mit Gleichem, man erhält gleiche Producte:

$$\begin{array}{r} a = a \\ m = d + n \\ \hline \end{array}$$

also ist $am = ad + an$

3) Man setze an sich selbst gleich, und subtrahire auf beiden Seiten:

$$\begin{array}{r} am = ad + an \\ an = an \\ - \quad - \\ \hline \end{array}$$

also ist $am - an = ad$

4) Anstatt d setze man wieder $(m - n)$, da $m - n = d$ (Nro. 1.), man erhält, daß $am - an = a(m - n)$, und also auch $a \times (m - n) = am - an$.

Daher ist z. B. $8 \times (6 - 3) = 48 - 24 = 24$.

V. Lehrsatz: Ein Quotient wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man mit ihr entweder den Dividend multiplicirt, oder den Divisor dividirt; und der Quotient wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man mit solcher entweder den Dividend dividirt, oder den Divisor multiplicirt; d. h.,

I. $(a : b) \times n = an : b = a : (b : n)$,

II. $(a : b) : n = (a : n) : b = a : (b \times n)$.

Beweis von I. a) Wenn man den Dividend a mit n multiplicirt, so wird er n mal gesetzt (I. 45. a.);

bleibt nun der Divisor unverändert, so muß offenbar jeder Theil, oder der Quotient n mal größer werden.

b) Läßt man aber den Dividend oder das Ganze unverändert, und dividirt man den Divisor mit der Zahl n, so setzt man davon den nten Theil, weßhalb der Dividend in nmal weniger Theile getheilt wird; um deswillen wird wieder jeder Theil, oder der Quotient n mal größer.

Es ist daher z. B. $(24 : 8) \times 2 = 24 \times 2 : 8 = 48 : 8 = 6$, und $(24 : 8) \times 2 = 24 : (8 : 2) = 24 : 4 = 6$.

Beweis von II. a) Wenn man den Dividend mit n dividirt, so wird das Ganze n mal kleiner, indem man dadurch von demselben den n ten Theil setzt, es wird also auch vom Quotienten der n te Theil gesetzt, und somit derselbe mit n dividirt.

b) Multiplicirt man aber den Divisor mit n, so wird die Anzahl der Theile n mal größer, mithin allemal ein Theil oder der Quotient n mal kleiner.

Es ist daher z. B. $(48 : 6) : 4 = (48 : 4) : 6 = 12 : 6 = 2$, und $(48 : 6) : 4 = 48 : 6 \times 4 = 48 : 24 = 2$.

VI. Lehrsatz: Ein Product zweyer Zahlen wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man einen der Factoren damit wirklich multiplicirt, und den anderen unverändern beysetzt, oder wie man sich der Kürze wegen ausdrückt, wenn man nur einen Factor multiplicirt; d. i., $(4 \times 3) \times 2 = 8 \times 3 = 4 \times 6$.

Beweis: $4 \times 3 = 4 + 4 + 4$ (I. §. 45. a.)

$$2 = 2$$

also ist $(4 \times 3) \times 2 = 8 + 8 + 8$ (I. Lehrs.)

$$= 8 \times 3$$

Eben so ist $4 \times 3 = 3 \times 4$

also $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$

$$2 = 2$$

mithin $(4 \times 3) \times 2 = 6 + 6 + 6 + 6$

$$= 6 \times 4 = 4 \times 6.$$

I. Zusatz: Eine ganze Zahl wird mit dem Producte zweyer ganzen Zahlen multiplicirt, wenn man nur mit einem Factor multiplicirt, und den anderen unverändert als Factor beysetzt; d. i., $2 \times (4 \times 3) = 8 \times 3 = 4 \times 6$.

Weil man die Stellen der Factoren verwechseln kann, so ist

$$2 \times (4 \times 3) = (4 \times 3) \times 2$$

ferner $(4 \times 3) \times 2 = 8 \times 3 = 4 \times 6$

also ist $2 \times (4 \times 3) = 8 \times 3 = 4 \times 6$.

II. Zusatz: Ein Product zweyer ganzen Zahlen wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man einen Factor dividirt, und den anderen als Factor dem Quotienten beysetzet; d. i. $(8 \times 6) : 2 = 4 \times 6 = 8 \times 3$, indem $(4 \times 6) \times 2 = 8 \times 6$, und $(8 \times 3) \times 2 = 8 \times 6$.

III. Zusatz: Eine ganze Zahl wird durch das Product zweyer ganzen Zahlen dividirt, wenn man nur mit einem Factor dividirt, und den anderen dem Quotienten als Divisor beyfügt; d. h., $24 : (4 \times 3) = 6 : 3 = 8 : 4$.

Wird nämlich 24 nur mit dem ersten Factor 4 dividirt, so ist der Quotient 6 offenbar dreymal zu groß, und dividirt man nur mit dem zweyten Factor 3, so ist der Quotient 8 viermal zu groß; man erhält daher den wahren Quotienten, wenn man im ersten Falle noch 6 mit 3, und im zweyten 8 mit 4 dividirt.

VII. Lehrsatz: Wenn man dem Producte des in ganzen Zahlen gefundenen Quotienten und des Divisors den Rest, der am Ende bleibt, addirt, so giebt die Summe den Dividend (I. §. 74. B.); d. i.,

$$dq + r = D.$$

Beweis: 1) Man bezeichne den jedesmaligen Dividend mit D, den Divisor mit d, den gefundenen Quotienten mit q, und den am Ende bleibenden Rest mit r, so ist $r = D - dq$, d. h., der Rest ist gleich dem Dividend davon abgezogen das Product des Divisors in den Quotienten; indem den bey den

ganzen Zahlen aufgestellten Divisionsregeln gemäß (I. §. 68.) der Divisor mit allen Partialquotienten, mithin mit dem ganzen Quotienten, in so ferne derselbe eine ganze Zahl ist, multiplicirt, und das Product jedesmal vom Dividend abgezogen wird.

2) Wenn man Gleiches zu Gleichem addirt, so erhält man Gleiches:

$$\begin{array}{rl} & r = D - dq \\ & dq = dq \\ \hline \text{also ist} & dq + r = D, \end{array}$$

d. h., wenn man dem Producte des in ganzen Zahlen gefundenen Quotienten und des Divisors den Rest, der am Ende bleibt, addirt, so giebt die Summe den Dividend.

Dividirt man z. B. 29 durch 8, so erhält man die Zahl 3 zum Quotienten, und 5 zum Reste; multiplicirt man 8 mit 3, und addirt man dem Producte 24 den Rest 5, so erhält man 29, oder $8 \times 3 + 5 = 24 + 5 = 29$.

I. Zusatz: Der bleibende Rest muß allezeit kleiner als der Divisor seyn (I. §. 68. Nro. 8.).

Würde der am Ende bleibende Rest so groß als der Divisor, mithin $r = d$ seyn, so wäre $q + 1$, und nicht q der wahre Quotient; indem

$$\begin{array}{rll} & dq + r = D, & d = r \\ \text{also} & dq + d = D & \\ \text{ferner} & d = d & \\ \hline \text{mithin} & dq : d + d : d = D : d. & \end{array}$$

Weil der nämliche Buchstabe die nämliche Größe bezeichnet, und jede Größe in sich selbst einmal enthalten ist, so ist $dq : d = q$, und $d : d = 1$, daher ist $dq : d + d : d = q + 1$, und somit $D : d = q + 1$, d. h., wenn $r = d$, so ist der Quotient um 1 zu klein; z. B. 6 sey in 24 dreymal enthalten, dann ist 6 der Rest, welcher dem Divisor gleich ist, und der Quotient 3 ist um 1 zu klein, da 6 in 24 nicht bloß 3mal, sondern 4mal enthalten ist.

Ist hingegen $r > d$, so ist der Quotient noch um

mehr, als nur um die Zahl 1 zu klein, oder $D : d > q + 1$; indem

$$
\begin{array}{ll}
 & D = dq + r, \qquad r > d \\
\text{also} & D > dq + d \\
\text{ferner} & d = d \\
\hline
\text{mithin} & D : d > q + 1.
\end{array}
$$

Es sey z. B. 4 in 36 siebenmal enthalten, so ist 8 der Rest, welcher größer ist, als der Divisor 4, weßhalb der Quotient um mehr als 1, und zwar in diesem Beyspiele um 2 zu klein ist, da 4 in 36 neunmal enthalten ist.

Weil nun bey der Division ganzer Zahlen der am Ende bleibende Rest weder so groß, noch größer als der Divisor seyn darf, so muß er, damit der gefundene Quotient nicht zu klein ist, allezeit kleiner seyn als der Divisor.

II. Zusatz: Wenn bey der Division ganzer Zahlen am Ende ein Rest bleibt, so giebt es keine ganze Zahl, die mit dem Divisor multiplicirt den Dividend wieder giebt, und man erhält in diesem Falle, da der zuletzt bleibende Rest durch den Divisor dividirt werden soll, immerhin einen ächten Bruch (II. §. 3. a.), der dem in ganzen Zahlen gefundenen Quotienten mittels des Additionszeichens, oder gewöhnlich ohne dasselbe angehängt, oder auch in einen Decimalbruch verwandelt wird (§. 20. und I. §. 66. Nro. 9 und 10.).

§. 54.

Regel der Multiplication in Absicht auf die Coefficienten und Buchstaben.

1) Man multiplicire die Coefficienten mit einander, und setze

2) die Buchstaben ohne ein dazwischen gesetztes Zeichen zusammen (§. 44. c.)

Beyspiel:

Es sey 4a mit 3b, ferner $\frac{5}{8}$ m mit $\frac{2}{3}$ n, endlich $(a + b + c + d)\,x$ mit qy zu multipliciren.

Auflösung:

1) Da 4 mit 3 multiplicirt zum Producte 12 giebt, und die Buchstaben ohne ein dazwischen gesetztes Zeichen zusammengesetzt werden, so ist $4a \times 3b = 12ab$.

2) Weil $\frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$, und $m \times n = mn$, so ist $\frac{3}{8} m \times \frac{2}{3} n = \frac{6}{24} mn = \frac{1}{4} mn$.

3) q ist der Coefficient von y, und $(a + b + c + d)$ jener von x; es ist aber $(a + b + c + d) \times q = aq + bq + cq + dq$ (§. 53. I. Lehrs.), und $x \times y = xy$, daher $(a + b + c + d) x \times qy = (aq + bq + cq + dq) xy$.

§. 55.

Regel der Division in Absicht auf die Coefficienten und Buchstaben.

1) Man dividire den Coefficienten des Dividends mit dem Coefficienten des Divisors.

2) Kommen im Dividend und Divisor gleiche Buchstaben vor, so streiche man sie aus, während 1 als Quotient nur dann geschrieben wird, wenn nach vorgenommener Division keine andere Größe mehr vorhanden ist.

3) Kommen aber im Dividend und Divisor verschiedene Buchstaben vor, so kann die Division nicht unmittelbar vorgenommen, sie muß demnach durch das Divisionszeichen ausgedrückt werden. Dieses letztere besteht entweder in zwey Puncten (:), wo der Dividend links, und der Divisor rechts geschrieben wird, oder auch darin, daß man den Quotienten in der Gestalt eines gemeinen Bruches anschreibt, wo der Dividend an die Stelle des Zählers, und der Divisor an die Stelle des Nenners zu stehen kömmt.

Bey-

Beyspiel:

Es sey 6ab durch 6ab, und 12mn durch 4mc zu dividiren.

Auflösung:

1) Weil $6 : 6 = 1$, $a : a = 1$, und $b : b = 1$, so ist $6ab : 6ab = 1$, d. h., a und a, dann b und b heben sich auf, daher ist die Zahl 1 der gefundene Quotient.

2) $12 : 4 = 3$, $m : m = 1$, und n dividirt durch c ist $= n : c = \frac{n}{c}$, daher ist $12mn : 4mc = 3\frac{n}{c} = 3n : c = \frac{3n}{c}$.

Anmerkung: 1) Der Ausdruck $a : b$, oder $\frac{a}{b}$, wird gelesen, „a dividirt durch b, oder a divisum per b.

2) Daß man auf die angezeigte Weise den wahren Quotienten erhalte, erhellet daraus, weil man nach den aufgestellten Regeln immer eine solche Zahl findet, die mit dem Divisor multiplicirt den Dividend wieder giebt (I. §. 61. Zus. I.).

3) Steht vor dem Dividend und Divisor kein Coefficient, so ist die Zahl 1 der Coefficient von beiden, die im Quotienten nur dann geschrieben wird, wenn keine andere Größe mehr vorhanden ist; daher ist z. B. $ab : ab = 1$.

§. 56.

Regel der Multiplication in Betreff der Zeichen.

a) Haben beide Factoren gleiche Zeichen, somit beide (+), oder beide (—), so bekömmt das Product allezeit das Zeichen (+), d. h., bey der Multiplication geben gleiche Zeichen im Producte das Zeichen (+), und ungleiche das Zeichen (—).

b) Hat aber einer der beiden Factoren das Zeichen (+), und der andere (—), so bekömmt das Product das Zeichen (—), d. h., ungleiche

Zeichen geben im Producte das Zeichen (—); daher ist z. B.

a) $\begin{cases} \text{I.} & +a \times +4 = +4a \\ \text{II.} & -a \times -4 = +4a \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{III.} & +a \times -4 = -4a \\ \text{IV.} & -a \times +4 = -4a \end{cases}$

und allgemein ist

a) $\begin{cases} \text{I.} & +a \times +n = +an \\ \text{II.} & -a \times -n = +an \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{III.} & +a \times -n = -an \\ \text{IV.} & -a \times +n = -an \end{cases}$

Beweis von a.

I. 1) Sieht man nicht auf die Zeichen der Größen, wie dieses in der gemeinen Arithmetik der Fall ist, wo von keinen positiven und negativen Größen die Rede ist, so heißt a mit 4 multipliciren eben so viel, als a soll 4mal gesetzt werden, wodurch man zum Producte 4a bekömmt (I. § 45. a.); wird aber auch auf die Zeichen Rücksicht genommen, so heißt multipliciren eine Größe so und so oft nehmen, als es der Multiplicator anzeigt, das erstere ist durch das Zeichen, und das letztere durch die Größe des Multiplicators bestimmt (§. 44. a.).

2) Das positive Zeichen (+) bestimmt, daß man den Multiplicand als eine zu addirende Größe, das ist, den Multiplicand selbst, und zwar so oft nehmen soll, als es der Multiplicator 4 angiebt, d. h.,

$$+a \times +4 = +a +a +a +a = +4a.$$

3) Weil es hier nur auf das Zeichen ankömmt, auf welches die Größe des Multiplicators keinen Einfluß hat, so ist überhaupt $+a \times +n = +an$.

II. 1) — a mit — 4 multipliciren heißt die negative Größe (— a) viermal als eine zu subtrahirende Größe setzen.

2) Eine negative Größe als eine zu subtrahirende Größe setzen heißt eben so viel, als ihr gleiches Gegentheil, mithin sie als eine positive Größe nehmen.

3) Daher heißt $-a$ mit -4 multipliciren eben so viel, als es soll das gleiche Gegentheil von $-a$, somit $+a$ viermal gesetzt werden, wodurch man $+4a$ zum Producte bekömmt, oder $-a \times -4 = +4a$.

4) Aus den nämlichen so eben angeführten Gründen ist überhaupt $-a \times -n = +an$.

Beweis von b.

III. 1) $+a$ mit -4 multipliciren heißt den Multiplicand als eine zu subtrahirende Größe 4mal setzen; es ist daher $+a \times -4 = -a - a - a - a = -4a$.

2) Da die Größe n auf die Bestimmung der Zeichen keinen Einfluß hat, so ist überhaupt $+a \times -n = -an$.

IV. 1) $-a$ mit $+4$ multipliciren, heißt den Multiplicand als eine zu addirende Größe viermal setzen; daher ist $-a \times +4 = -a - a - a - a = -4a$.

2) Aus dem nämlichen Grunde ist überhaupt $-a \times +n = -an$.

§. 57.

Regel der Division hinsichtlich der Zeichen.

a) Hat sowohl der Dividend als auch der Divisor das Zeichen (+), oder haben beide das Zeichen (—), so bekömmt der Quotient das Zeichen (+), d. h., bey der Division geben gleiche Zeichen im Quotienten das Zeichen (+) ungleiche das Zeichen (—).

b) Hat aber der Dividend das Zeichen (+), und der Divisor das Zeichen (—), oder umgekehrt jener (—), und dieser (+), so bekömmt der Quotient das Zeichen (—); d. h., bey der Division verhält sich die Sache rücksichtlich der Zeichen eben so, wie bey der Multiplication, es geben nämlich gleiche Zeichen (+), und ungleiche (—); daher ist z. B.

a) $\begin{cases} \text{I.} + 4a : + 4 = + a \\ \text{II.} - 4a : - 4 = + a \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{III.} + 4a : - 4 = - a \\ \text{IV.} - 4a : + 4 = - a \end{cases}$

und allgemein ist

a) $\begin{cases} \text{I.} + an : + n = + a \\ \text{II.} - an : - n = + a \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{III.} + an : - n = - a \\ \text{IV.} - an : + n = - a \end{cases}$

Beweis von a.

I. 1) Eine positive Größe mit einer positiven, somit $+ 4a$ mit $+ 4$, und allgemein $+ an$ mit $+ n$ dividiren, heißt den Dividend als eine zu addirende Größe in so viele gleiche Theile theilen, als es der Divisor angiebt, so daß ein solcher gefundener Quotient mit dem Divisor multiplicirt den Dividend wieder giebt.

2) Der 4te Theil von $+ 4a$ ist die Größe $+ a$, und überhaupt der nte Theil von $+ an$ ist $+ a$.

3) Ferner $+ 4 \times + a$ oder $+ a \times + 4 = + 4a$, und $+ a \times + n = + an$; daher ist $+ 4a : + 4 = + a$, und $+ an : + n = + a$.

II. 1) Eine negative Größe mit einer negativen, somit $- 4a$ mit $- 4$, und allgemein $- an$ mit $- n$ dividiren, heißt die negative Größe als eine zu subtrahirende Größe, mithin ihr gleiches Gegentheil, d. h., sie als eine positive Größe in so viele gleiche Theile theilen, als es der Divisor anzeigt, so daß wieder so ein Theil oder Quotient mit dem Divisor multiplicirt den Dividend wieder giebt.

2) Der 4te Theil des Gegentheiles von $- 4a$ ist $+ a$, und überhaupt der nte Theil des Gegentheiles von $- an$ ist $+ a$.

3) Ferner $- 4 \times + a$ oder $+ a \times - 4 = - 4a$, und $+ a \times - n = - an$.

Daher ist $- 4a : - 4 = + a$, und $- an : - n = + a$.

Beweis von b.

Aus den nämlichen so eben angeführten Gründen ist auch

$$\text{III.}\quad \begin{aligned} +4a : -4 &= -a, \\ +an : -n &= -a; \end{aligned}$$

$$\text{IV.}\quad \begin{aligned} -4a : +4 &= -a, \\ -an : +n &= -a; \end{aligned}$$

indem

$$\begin{aligned} -a \times -4 &= +4a, \\ -a \times -n &= +an; \\ -a \times +4 &= -4a, \text{ und} \\ -a \times +n &= -an. \end{aligned}$$

§. 58.

Aufgabe, zusammengesetzte Größen in der Buchstabenrechnung mit einander zu multipliciren.

Auflösung:

1) Man nehme einen beliebigen Factor, etwa denjenigen, der aus mehreren Gliedern besteht, als Multiplicand, und den anderen als Multiplicator, schreibe diesen unter jenen, und ziehe unten einen Strich.

2) Man fange die Multiplication links an, multiplicire den bisher in Betreff der Zeichen, Coefficienten, und Buchstaben aufgestellten Regeln gemäß mit einem jeden Gliede des Multiplicators alle Theile des Multiplicands, somit den ganzen Multiplicand, und schreibe die Partialproducte in einer beliebigen Ordnung unter einander.

3) Hat man auf diese Weise mit allen Gliedern des Multiplicators multiplicirt, so addire man nach §. 48. sämmtliche Partialproducte, die erhaltene Summe giebt dann das verlangte Totalproduct.

4) Sind mehr als zwey Factoren mit einan=

der zu multipliciren, so multiplicire man zuerst zwey beliebige Factoren mit einander, dann das erhaltene Product mit einem neuen Factor, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man das Product aller Factoren gefunden hat.

I. Beyspiel:

Es sey $+ 6a - 4c$ mit $+ 8b - d$ zu multipliciren.

Auflösung:

Man setze $+ 6a - 4c$ als Multiplicand, und $+ 8b - d$ als Multiplicator:

Multiplicand	$+ 6a - 4c$
Multiplicator	$+ 8b - d$

2) Mit $+ 8b$ multiplicire man den ganzen Multiplicand, es ist $+ 6a \times + 8b = + 48ab$, und $- 4c \times + 8b = - 32bc$; daher ist $+ 48ab - 32bc$ das erste Partialproduct.

Eben so multiplicire man mit $- d$ den ganzen Multiplicand, es ist $+ 6a \times - d = - 6ad$, und $- 4c \times - d = + 4cd$, daher ist $- 6ad + 4cd$ das zweyte Partialproduct.

Diese beiden Partialproducte addire man, man erhält $+ 48ab - 32bc - 6ad + 4cd$ als das verlangte Product:

Multiplicand	$+ 6a - 4c$
Multiplicator	$+ 8b - d$
Partialproducte	$\begin{cases} + 48ab - 32bc \\ - 6ad + 4cd \end{cases}$
Totalproduct	$+ 48ab - 32bc - 6ad + 4cd$; d. h.,

$(6a - 4c) \times (8b - d) = 48ab - 32bc - 6ad + 4cd.$

II. Beyspiel:

Es sey $\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b + \frac{4}{5}d$ mit $4f - \frac{5}{7}g$ zu multipliciren.

Auflösung:

Man nehme den ersten Factor, welcher drey Glieder hat, als Multiplicand, und den anderen als Multiplicator, und verfahre den aufgestellten Regeln gemäß:

Multiplicand	$\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b + \frac{4}{5}d$
Multiplicator	$4f - \frac{5}{7}g$
Partial-	$2af - \frac{8}{3}bf + \frac{16}{5}df$
producte	$- \frac{5}{14}ag + \frac{10}{21}bg - \frac{20}{35}dg$
Totalproduct	$2af - \frac{8}{3}bf + \frac{16}{5}df - \frac{5}{14}ag + \frac{10}{21}bg - \frac{20}{35}dg.$

Daher ist $(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b + \frac{4}{5}d) \times (4f - \frac{5}{7}g) = 2af - \frac{8}{3}bf + \frac{16}{5}df - \frac{5}{14}ag + \frac{10}{21}bg - \frac{20}{35}dg.$

Anmerkung: Das Zeichen (+) habe ich beym vorigen Beyspiele nur der Deutlichkeit wegen im Anfange geschrieben; gewöhnlich wird dasselbe, wie dieses schon bemerkt wurde, an der ersten Stelle sowohl bey einfachen, als auch bey zusammengesetzten Größen nicht geschrieben, und muß also da verstanden werden.

III. Beyspiel:

Es soll $3a + 2b$ mit $4f + g$, und mit $m - n$ multiplicirt werden.

Auflösung:

1) Man multiplicire zwey beliebige Factoren, etwa die beiden ersten mit einander; es ist $(3a + 2b) \times (4f + g)$, oder $(3a + 2b)(4f + g)$ (I. §. 45. f.) $= 12af + 8bf + 3ag + 2bg$.

2) Dieses Product multiplicire man mit dem dritten Factor $(m - n)$, man findet dadurch das verlangte Product dieser drey Factoren; es ist nämlich $(3a + 2b)(4f + g)(m - n) = 12afm + 8bfm + 3agm + 2bgm - 12afn - 8bfn - 3agn - 2bgn$.

Anmerkung: Weil alle Glieder der Partialproducte sowohl in diesem, als auch in dem I. und II. so eben angeführten Beyspiele ungleichartig waren, so wurden dieselben unverändert mit ihren Zeichen, indem man die Stellen der Summenden verwechseln darf, in beliebiger Ordnung

neben einander gesetzt. Würden aber in den Partialproducten gleichartige Größen vorkommen, so müßten dieselben wirklich nach Vorschrift des §. 48. addirt werden, wo dann im Totalproducte die erhaltenen Summen wieder in beliebiger Ordnung neben einander gesetzt werden.

IV. Beyspiel:

Es soll $8 + 7$ mit $8 - 7$ multiplicirt werden.

Auflösung:

Multiplicand	$8 + 7$
Multiplicator	$8 - 7$
Partial-	$64 + 56$
producte	$- 56 - 49$
Totalproduct	$64 - 49 = 15.$

Es ist also $(8 + 7)(8 - 7) = 64 - 49 = 15.$

§. 59.

Aufgabe, zusammengesetzte Größen in der Buchstabenrechnung zu dividiren.

Auflösung:

1) Weil man bey einer zusammengesetzten Größe die Stellen der einzelnen Theile beliebig verwechseln kann, ohne daß dieselbe hinsichtlich des Werthes verändert wird, so reihe man die einzelnen Glieder des Dividends und des Divisors immerhin so, daß das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors genau, d. h., ohne Rest dividirt werden kann, und somit jederzeit der erste Partialquotient kein Bruch ist.

Kann dieses nicht geschehen, so kann auch die Division nach den bisher aufgestellten Regeln nicht wirklich vorgenommen werden, weßhalb dieselbe einsweilen durch das Divisionszeichen ausgedrückt wird.

2) Den ersten Partialquotienten, den man erhält, wenn man das erste Glied des Dividends mit dem ersten Gliede des Divisors nach den bisher in Absicht auf die Zeichen, Coefficienten und Buchstaben aufgestellten Regeln dividirt, schreibe man rechts nach dem gezogenen Verticalstriche, multiplicire damit den ganzen Divisor, und ziehe das Product vom Dividend ab.

3) Auf diese Weise setze man das Verfahren so lange fort, bis man alle Theile des Dividends dividirt hat, und addire alle einzelnen Quotienten, die Summe giebt dann den verlangten Quotienten.

I. Beyspiel:

Es sey $+ 48ab - 32bc - 6ad + 4cd$ durch $+ 8b - d$ zu dividiren (§. 58. I. Beysp.).

Auflösung:

1) Weil $+ 48ab$ durch $+ 8b$ theilbar ist, so lasse man diese beiden Glieder an der ersten Stelle, und dividire $+ 48ab$ durch $+ 8b$, es ist $+ 48ab : + 8b = + 6a$.

Mit diesem Quotienten multiplicire man den ganzen Divisor, und ziehe das erhaltene Product vom Dividend ab; es ist $(+ 8b - d) \times + 6a = + 48ab - 6ad$, weßhalb nach vorgenommener Subtraction vom Dividend noch $- 32bc + 4cd$ übrig bleibt.

2) Diesen Rest dividire man mit dem nämlichen Divisor, es ist $- 32bc : + 8b = - 4c$. Ferner multiplicire man mit diesem zweyten Partialquotienten den ganzen Divisor, und ziehe das Product ab, man erhält zum Reste Null; daher ist jetzt die ganze Division beendet:

Divid. $+ 48ab - 32bc - 6ad + 4cd$ { Quot. $+ 6a - 4c$
Divis. $(+ 8b - d)$
Prod. $+ 48ab - 6ad$
$- \quad +$

Rest $- 32bc + 4cd$
Divisor $(+ 8b - d)$
Product $- 32bc + 4cd$
$+ \quad -$

Daher ist $(+ 48ab - 32bc - 6ad + 4cd) : (+ 8b - d) = + 6a - 4c$.

II. Beyspiel:

Es sey $15ad - 9bd + 15cd - 20ae + 12be - 20ce$ durch $3d - 4e$ zu dividiren.

Auflösung:

Dividend { Quotient
$15ad - 9bd + 15cd - 20ae + 12be - 20ce$ { $5a - 3b + 5c$
$(3d - 4e)$ ist der Divisor
$15ad - 20ae$
$- \quad +$

$- 9bd + 15cd + 12be - 20ce$
$: (3d - 4e)$
$- 9bd + 12be$
$+ \quad -$

$15cd - 20ce$
$: (3d - 4e)$
$15cd - 20ce$
$- \quad +$

Daher ist $(15ad - 9bd + 15cd - 20ae + 12be - 20ce) : (3d - 4e) = 5a - 3b + 5c$.

III. Beyspiel:

Es soll 64 — 49 durch 8 — 7 dividirt werden (§. 58. IV. Beyspiel.)

Auflösung:

Dividend 64 — 49 { 8 + 7 Quotient
Divisor (8 — 7)
Product 64 — 56
— +
―――――
Rest 56 — 49 oder — 49 + 56
Divisor (8 — 7) : (— 7 + 8)
Product 56 — 49 — 49 + 56
— + + —
―――――

Daher ist (64 — 49) : (8 — 7) = 8 + 7

Anmerkung: 1) Wie die Division in jenen Fällen geschieht, wo das erste Glied des Dividends mit dem ersten Gliede des Divisors dividirt immerhin einen Bruch giebt, wird späterhin gezeigt werden.

2) Will man bey den bisher angeführten vier Rechnungsarten die Probe machen, so wird diese, wie ich es in Absicht auf die Addition und Subtraction schon bemerkte (§. 50.), in der Buchstabenrechnung eben so gemacht, wie in der gemeinen Arithmetik; weßhalb in dieser Rücksicht sowohl hier, als auch in der Folge, wenn von den vier Rechnungsarten mit den Brüchen, Potenzen und Wurzelgrößen die Rede seyn wird, die im I. Theile in den §§. 41, 42, 74 und 75 aufgestellten Regeln in Anwendung kommen.

3) Einige drücken sowohl die bey ganzen Zahlen, als auch die in diesem §. in Absicht auf die Division angegebene Verfahrungsweise kurz durch diesen Vers aus: „Divide, multiplica, subtrahe, pone loca."

II Abschnitt.

Von der Theilbarkeit ganzer Zahlen, wie auch von den geraden und ungeraden Zahlen.

§. 60.
Einige Erklärungen.

a) Wenn sich eine ganze Zahl A durch eine andere Zahl B ohne Rest theilen läßt, und man somit bey der vorgenommenen Division eine ganze Zahl n ohne Rest zum Quotienten erhält, so sagt man, A sey durch B theilbar.

In diesem Falle giebt B mit n multiplicirt, oder nmal genommen, genau wieder die Zahl A, oder n × B = B × n = A, weßhalb B das Maaß oder ein aliquoter Theil von A ist. Weil z. B. 12 : 3 = 4, und somit 3 × 4 = 12, so ist 3 das Maaß von 12 (II. §. 10. a.).

b) Lassen sich zwey Zahlen A und C zugleich durch die nämliche Zahl B ohne Rest theilen, so ist B das gemeine Maaß für A und C; z. B. 12 : 4 = 3, und 8 : 4 = 2, daher ist 4 das gemeine Maaß dieser beiden Zahlen (II. §. 10. b.).

c) Theilet die Zahl B die beiden Zahlen A und B so, daß die erhaltenen Quotienten Primzahlen (II. §. 10. c.) sind, so ist B das größte gemeine Maaß dieser beiden Zahlen (II. §. 10. g.); z. B. zu 16 und 24 ist 8 das größte gemeine Maaß, da 16 : 8 = 2 und 24 : 8 = 3.

Zusatz: Wenn A durch B theilbar ist, so ist auch, wenn m eine ganze Zahl bezeichnet, das Product mA durch B noch theilbar; indem ein Product zweyer ganzen Zahlen dadurch dividirt wird, daß man nur einen Factor dividirt, und den anderen unverändert als Factor beysetzt.

Es ist daher z. B. das Product $(8 \times 3) = 24$ durch 4 noch theilbar, oder $24 : 4 = 6$, da 8 durch 4 theilbar ist, und $(8 \times 3) : 4 = (8 : 4) \times 3 = 2 \times 3 = 6$ (§. 53. II. Zus.).

Anmerkung: Die übrigen Erklärungen hinsichtlich der Primzahlen, und der zusammengesetzten Zahlen findet man im II. Theile §. 10. bey c, d, e und f, weßhalb sie hier nicht angeführt werden.

§. 61.

Lehrsatz:

Wenn zwey Zahlen A und B das gemeine Maaß m haben, und man A sowohl als B mit m dividirt, so ist das Product, das man erhält, wenn man die erhaltenen Quotienten P und Q mit dem gemeinen Maaße m multiplicirt, durch A sowohl als B theilbar; d. h.,

$$m \,|\, A,\ B \quad \text{z. B.} \quad 4 \,|\, 8,\ 12$$
$$ \,|\, P,\ Q \quad \phantom{\text{z. B.}} \quad \,|\, 2,\ 3;$$

wo nun das Product mPQ durch A und B, gleichwie $4 \times 2 \times 3 = 24$ durch 8 und 12 theilbar ist; indem $24 : 8 = 3$, und $24 : 12 = 2$.

Beweis:

1) $A : m = P$, daher $A = mP$, ferner $B : m = Q$, weßhalb $B = mQ$; es ist also, da jede Größe in sich selbst einmal enthalten ist, mP durch A, und mQ durch B theilbar.

2) Ist aber mP durch A, und mQ durch B theilbar, so kann auch $mP \times Q = mPQ$, und $mQ \times P = mPQ$ durch A und B ohne Rest dividirt werden (§. 60. Zus.)

I. Zusatz: Wenn mehrere Zahlen A, B, C ꝛc. das gemeine Maaß m haben, so daß alle diese Zahlen durch m theilbar sind, und $A : m = P$, $B : m = Q$, $C : m = R$ ꝛc., so ist das Product des Maaßes m in alle Quotienten P, Q, R ꝛc. durch die gegebenen Zahlen theilbar, d. h., das Product $mPQR\ldots$ ist durch A, B, C ꝛc. theilbar; oder

m | A, B, C, D z. B. 3 | 3, 9, 27, 81
  | P, Q, R, S | 1, 3, 9, 27;

hier ist das Product $3 \times 3 \times 9 \times 27 = 2187$ durch 3 „ 9 „ 27 und 81 theilbar, indem $2187 : 3 = 729$, dann $2187 : 9 = 243$, ferner $2187 : 27 = 81$, und $2187 : 81 = 27$.

II. Zusatz: Wenn alle auf diese Weise erhaltenen Quotienten, oder auch nur einige davon das gemeine Maaß n haben, so daß $P : n = O$, $Q : n = T$, $R : n = U$ rc. und n kein Maaß von S ist, so ist wieder das Product der beiden Maaße in die Quotienten O, T, U rc. und in den vorigen Quotienten S durch alle gegebenen Zahlen, somit das Product mnOTUS... durch A, B rc. theilbar; oder

m | A, B, C, D z. B. 4 | 4, 8, 16, 20
n | P, Q, R, S   2 | 1, 2, 4, 5
  | O, T, U, S | 1, 1, 2, 5
  | | 2, 5;

hier ist das Product $4 \times 2 \times 2 \times 5 = 80$ durch die oben stehenden Zahlen 4 „ 8 „ 16 „ und 20 theilbar, indem $80 : 4 = 20$, dann $80 : 8 = 10$, ferner $80 : 16 = 5$, und $80 : 20 = 4$.

III. Zusatz: Wenn man daher wie immer viele Zahlen durch ein gemeines Maaß dividirt, und man so bey allen Quotienten verfährt, bis dieselben zuletzt relative Primzahlen sind, so ist das Product aller gebrauchten Maaße in alle zuletzt gefundenen Quotienten, und in jene Zahlen, die kein gemeines Maaß haben, durch jede der gegebenen Zahlen theilbar; wie dieses aus dem im II. Theile §. 16. angeführten Beyspiele ersichtlich ist, wo das gefundene Product $1.2.5.7.3.2.2 = 840$ durch alle Nenner der gegebenen Brüche, nämlich durch 6 „ 7 „ 12 „ 8 „ rc. theilbar ist.

§. 62.

Lehrsatz:

I. Das gemeine Maaß des Divisors und des bleibenden Restes ist auch ein Maaß des Dividends; und

II. das Maaß des Dividends und des Divisors ist auch das Maaß des Restes.

Wenn nämlich A mit B dividirt den Rest C giebt, und die Zahlen B und C durch m theilbar sind, so ist auch der Dividend A durch diese Zahl m theilbar; z. B. 70 mit 60 dividirt giebt den Rest 10; die Zahl 5 ist das Maaß vom Reste 10, und vom Divisor 60, also ist sie auch das Maaß von 70, oder 10 : 5 = 2, und 60 : 5 = 12, daher ist auch 70 : 5 = 14, und somit 70 durch 5 theilbar.

Eben so ist auch der Rest C durch m theilbar, wenn die Zahl m das Maaß des Dividends A und des Divisors B ist; z. B. sowohl der Dividend 70 als auch der Divisor 60 ist theilbar durch 10, daher ist es auch der Rest 10, oder 70 : 10 = 7, und 60 : 10 = 6, daher ist auch 10 : 10 = 1, und somit 10 durch 10 theilbar.

Beweis von I.

1) Der Dividend ist allezeit gleich jener Summe, die man erhält, wenn man dem Producte des Divisors in den Quotienten den Rest addirt (§. 53. Lehrs. VII.); bezeichnet man also den Dividend mit A, den Divisor mit B, den in ganzen Zahlen gefundenen Quotienten mit a, und den Rest mit C, so ist

$$A = aB + C$$

2) Gleiches mit Gleichem dividirt giebt wieder Gleiches,

$$A = aB + C$$
$$m = m$$

also ist auch $A : m = aB : m + C : m$ oder

$$\frac{A}{m} = \frac{aB}{m} + \frac{C}{m}$$

3) Weil der Voraussetzung gemäß m das gemeine Maaß für B und C ist, so ist sowohl aB als auch C durch m theilbar, und die erhaltenen Quotienten sind genau ganze Zahlen, weßhalb ihr Summe auch eine solche ganze Zahl ist.

4) $aB : m + C : m = A : m$, daher giebt A dividirt durch m zum Quotienten eine ganze

Zahl ohne einen Rest, d. h., wenn der Rest C und der Divisor B durch m theilbar ist, so ist auch der Dividend A durch die Zahl m theilbar.

Beweis von II.

1) Dem so eben Gesagtem gemäß ist

$$A = aB + C$$
$$m = m$$

also ist auch $A : m = aB : m + C : m$ oder

$$\frac{A}{m} = \frac{aB}{m} + \frac{C}{m}.$$

2) Der Voraussetzung gemäß ist die Zahl m das Maaß vom Dividend A und vom Divisor B, also ist A und aB durch m theilbar.

3) $A : m = aB : m + C : m$; gleichwie nun $A : m$ genau eine ganze Zahl ist, so muß auch die Summe von $aB : m + C : m$ genau eine ganze Zahl seyn; es ist aber $aB : m$, da aB durch m theilbar ist genau eine ganze Zahl, also ist auch $C : m$ genau eine ganze Zahl, weil sonst die Summe nie eine solche Zahl seyn könnte, d. h., das Maaß des Dividends und des Divisors ist auch das Maaß des Restes.

I. Zusatz: Wenn von zwey ungleichen Zahlen $A > B$, und wenn A durch B theilbar ist, so ist B das größte gemeine Maaß beider Zahlen; denn $A : B = m$, und $B : B = 1$, daher sind die Quotienten m und 1 relative Primzahlen, und somit ist B das größte gemeine Maaß der beiden Zahlen A und B, z. B. $45 > 15$, und 45 ist durch 15 theilbar, daher ist 15 das größte gemeine Maaß für 45 und 15, indem $45 : 15 = 3$, $15 : 15 = 1$, und somit die erhaltenen Quotienten 3 und 1 relative Primzahlen sind.

II. Zusatz: Wenn A durch B nicht theilbar ist, so kann das gemeine Maaß dieser beiden Zahlen nicht größer seyn als der Rest C; z. B. 45 ist durch 30 nicht theilbar, es bleibt bey der vorgenommenen Division die Zahl 15 als Rest, weßhalb das gemeine Maaß von 45 und 30 nicht größer seyn kann als 15, indem dasselbe auch den Rest 15 ohne Rest theilen muß.

III.

III. **Zusatz:** Wenn C die kleinere Zahl B ohne Rest theilet, so ist C das größte gemeine Maaß der Zahlen A und B; z. B. wenn man 24 mit 16 dividirt, so erhält man 8 als Rest, welcher 16 ohne Rest theilet, und daher das größte gemeine Maaß der Zahlen 16 und 24 ist, da 16 : 8 = 2, ferner 24 : 8 = 3, und 2 und 3 relative Primzahlen sind.

§. 63.

Aufgabe, für zwey gegebene Zahlen, z. B., für 360 und 1155 das größte gemeine Maaß zu suchen.

Auflösung:

Verfährt man den hierüber im II. Theile §. 12. aufgestellten Regeln gemäß, so erhält man 15 als das größte gemeine Maaß dieser beiden Zahlen:

A =	1155	3
B =	360	
	1080	
C =	75	4
	300	
D =	60	1
	60	
E =	15	4
	60	

Beweis:

a) Der Rest 15, durch welchen der vorige Rest 60 theilbar ist, ist ein gemeines Maaß der beiden Zahlen 360, und 1155; denn

1) 15 theilet sich selbst ohne Rest, oder wie man sich kürzer ausdrückt, 15 theilet sich selbst und 60, also auch 75;

2) 15 theilet 60 und 75, also auch 360;

3) 15 theilet 75 und 360, also auch 1155; es ist also der Rest 15 ein gemeines Maaß von 360, und 1155 (§. 62. Lehrs. I.)

b) 15 ist das größte gemeine Maaß von 360, und 1155; denn

1) 15, wie dieses so eben erwiesen wurde, ist ein gemeines Maaß von 1155 und 360, also auch von 75;

2) 15 ist ein gemeines Maaß von 360 und 75, also auch von 60;

3) 15 ist ein gemeines Maaß von 75 und 60, also auch von 15; daher kann das gemeine Maaß von 360 und 1155 nicht größer seyn als 15, weßhalb der Rest 15 für dieselben das größte gemeine Maaß ist (§. 62. Lehrs. II.).

Allgemein lautet dieser Beweis so:

a. 1) Der Rest E theilet sich selbst und D, also auch C;

2) E theilet D und C, also auch B;

3) E theilet C und B, also auch A; weßhalb der Rest E das gemeine Maaß von A und B ist.

b. 1) Das gemeine Maaß von A und B ist auch ein Maaß von C;

2) das gemeine Maaß von B und C ist auch ein Maaß von D;

3) das gemeine Maaß von C und D ist auch ein Maaß von E; es kann also das gemeine Maaß von A und B nicht größer seyn als E, weßhalb der Rest E das größte gemeine Maaß von beiden ist.

§. 64.

Entwicklung der Regeln, welche bestimmen, durch welche der ersten 10 Zahlen eine gegebene ganze Zahl theilbar ist.

1) Jede gegebene ganze Zahl besteht immer nur aus den gewöhnlichen zehen Ziffern, welchen ein dop-

petter Werth — der natürliche und der Local-Werth zukömmt (I. §. 13.).

2) Den natürlichen Werth des an der Stelle der Einer zur Linken stehenden Ziffers drückt man durch a, jenen an der Stelle der Zehner durch b, und so der Ordnung nach an den folgenden durch c, d, e ꝛc. aus.

3) Den Localwerth (I. §. 14.) drückt man durch die beygesetzten Factoren 10 „ 100 „ 1000 „ ꝛc. aus.

4) Auf diese Weise erhält man den allgemeinen Ausdruck „$a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + \ldots$, welcher jede mögliche ganze Zahl darstellet, und wo zugleich durch die Verschiedenheit der Buchstaben die Stelle bezeichnet ist, die dem Ziffer bey der gegebenen Zahl zukömmt; so drückt z. B. c das Ziffer an der dritten Stelle, aber ohne Localwerth, aus.

Es sey z. B. die Zahl 654321 gegeben.

Weil jede ganze Zahl eine Summe von Einern, Zehnern, Hunderten ꝛc. ist, und man die Stellen der Summanden verwechseln darf, so ist $654321 = 600000 + 50000 + 4000 + 300 + 20 + 1 = 1 + 20 + 300 + 4000 + 50000 + 600000$.

Ferner $20 = 2 \times 10 = 10 \times 2$, $300 = 3 \times 100 = 100 \times 3$, $4000 = 4 \times 1000 = 1000 \times 4$, $50000 = 5 \times 10000 = 10000 \times 5$, und $600000 = 6 \times 100000 = 100000 \times 6$.

Daher ist $654321 = 1 + 10 . 2 + 100 . 3 + 1000 . 4 + 10000 . 5 + 100000 . 6$, und somit ganz dem bey Nro. 4. aufgestellten allgemeinen Ausdrucke gemäß.

5) Dividirt man nun diesen allgemeinen Ausdruck durch die ersten zehen Zahlen mit Ausnahme von 1, da diese Zahl jede gegebene Zahl theilet, läßt man dabey die Quotienten weg, und setzet man die bleibenden Reste in eine horizontale Reihe, so erhält man nachstehende Tabelle:

	die Divisoren	die gegebene Zahl a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + ...	
I	2	a	ist der 1te Rest
II	3	a + b + c + d + e + ...	der 2te Rest
III	4	a + 2b	der 3te Rest
IV	5	a	der 4te Rest
V	6	a + 4b + 4c + 4d + 4e + ...	der 5te Rest
VI	7	a + 3b + 2c + 6d + 4e + ...	der 6te Rest
VII	8	a + 2b + 4c	der 7te Rest
VIII	9	a + b + c + d + e ...	der 8te Rest
IX	10	a	der 9te Rest

6) Jeder in der zweyten verticalen Reihe vorkommende Divisor dividirt sich selbst ohne Rest, theilet er nun auch den Rest, den man erhielt, als man mit ihm die oben stehende allgemein ausgedrückte Zahl dividirte, so ist der Divisor auch ein Maaß dieser Zahl, die somit durch denselben theilbar ist (§. 62. Lehrs. I.).

Daraus entspringen nun diejenigen Regeln, welche bey der Verkleinerung der Brüche im II. Theile §. 11. ausführlich dargestellt, und durch Beyspiele erläutert worden sind; weßhalb dieselben hier nicht angeführt werden.

Für 6 und 7 läßt sich keine für die Anwendung bequeme, folglich brauchbare Regel angeben.

§. 65.

Von den geraden und ungeraden Zahlen.

Lehrsatz:

Wenn m und n ganze Zahlen bezeichnen, so läßt sich jede gerade Zahl durch 2m oder 2n, und jede ungerade Zahl durch 2m + 1, und 2n + 1, oder auch durch 2m — 1, und 2n — 1 ausdrücken.

Beweis:

1) Eine gerade Zahl (Numerus par), wie ich

dieses schon bey Ausziehung der Quadratwurzeln in Zahlen bemerkte, ist diejenige Zahl, die durch 2 theilbar ist, z. B. 2 „ 4 „ 8 „ 16 rc.; eine ungerade Zahl (Numerus impar) heißt diejenige Zahl, die nicht durch 2 theilbar ist, z. B. 3 „ 5 „ 7 „ 9 rc.

2) Wird die gerade Zahl A durch 2 dividirt, so giebt sie zum Quotienten genau eine ganze Zahl, die man durch m oder n ausdrücken kann, daher ist $A : 2 = m$, oder $A : 2 = n$, und somit $A = 2m$, oder $A = 2n$. (I. §. 61. I. Zus).

Drücken demnach m und n ganze Zahlen aus, so bezeichnen die Ausdrücke 2m und 2n immer gerade Zahlen; z. B. es sey $m = 3$, und $n = 8$, so ist $2m = 2 \times 3 = 6$, und $2n = 2 \times 8 = 16$, wo nun 6 und 16 gerade Zahlen sind.

3) Addirt man zu einer ganzen geraden Zahl, oder subtrahirt man davon 1, so erhält man immerhin eine ungerade Zahl; da nun 2m und 2n gerade Zahlen ausdrücken, so bezeichnen die Ausdrücke $2m + 1$, und $2n + 1$, oder $2m - 1$ und $2n - 1$ jederzeit eine ungerade Zahl; es sey z. B. $m = 5$, und $n = 10$, dann ist $2m + 1 = 2 . 5 + 1 = 10 + 1 = 11$, und $2n + 1 = 2 . 10 + 1 = 20 + 1 = 21$, oder $2m - 1 = 2 . 5 - 1 = 10 - 1 = 9$, und $2n - 1 = 2 . 10 - 1 = 20 - 1 = 19$, wo 11 „ 21 „ 9 und 19 ungerade Zahlen sind.

I. Zusatz: Die Summe sowohl als die Differenz zweyer geraden Zahlen ist gerade; denn $(2m + 2n) : 2 = m + n$, und $(2m - 2n) : 2 = m - n$, wo sowohl, da m und n ganze Zahlen ausdrücken, die Summe $(m + n)$ und die Differenz $(m - n)$ genau eine ganze Zahl, und somit die Summe oder Differenz zweyer geraden Zahlen wieder eine gerade Zahl ist; z. B. $8 + 12 = 20$, und $18 - 10 = 8$.

II. Zusatz: Die Summe sowohl als die Differenz zweyer ungeraden Zahlen ist eine gerade Zahl; denn $(2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2$,

und $(2m + 2n + 2) : 2 = m + n + 1$, eben so ist $(2m + 1) - (2n + 1) = 2m - 2n$, und $(2m - 2n) : 2 = m - n$, wo sowohl die Summe $(m + n + 1)$ als auch die Differenz $(m - n)$ genau eine ganze Zahl ist; z. B. $11 + 5 = 16$, und $11 - 5 = 6$.

III. Zusatz: Die Summe sowohl als die Differenz einer geraden und ungeraden Zahl ist ungerade; denn $2m + (2n + 1) = 2m + 2n + 1$, dann

$2m - (2n + 1) = 2m - 2n - 1$, und

$(2m + 1) - 2n = 2m - 2n + 1$,

wo $2m + 2n + 1$, dann $2m - 2n - 1$, und $2m - 2n + 1$ durch 2 nicht theilbar ist; z. B. $7 + 8 = 15$, $12 - 7 = 5$, und $19 - 14 = 5$.

IV. Zusatz: Das Product zweyer geraden, oder auch einer geraden in eine ungerade Zahl, ist gerade; denn $2m \times 2n = 4mn$, und $4mn : 2 = 2mn$, ferner

$(2m + 1) \times 2n = 4mn + 2n$, und

$4mn + 2n : 2 = 2mn + n$,

wo sowohl der Quotient $2mn$, als auch $(2mn + n)$ genau eine ganze Zahl ist; z. B. $4 \times 8 = 32$, und $8 \times 3 = 24$.

V. Zusatz: Das Product zweyer ungeraden Zahlen ist wieder eine ungerade Zahl; denn

$(2m + 1) \times (2n + 1) = 4mn + 2n + 2m + 1$,

wo das Product $(4mn + 2n + 2m + 1)$ durch 2 nicht theilbar ist; z. B. $7 \times 5 = 35$.

III. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit Brüchen in der Buchstabenrechnung.

§. 66.

Einleitung zu diesen vier Rechnungsarten.

a) Jeder Bruch kann allgemein durch $\frac{a}{b}$ ausgedrückt werden, wo der Buchstabe a jeden Zähler, der Buchstabe b jeden nur immer vorkommenden Nenner bezeichnet, und die zwischen a und b gezogene Linie das Bruchzeichen ist (II. §. 2. c.).

Der Bruch $\frac{a}{b}$ drückt aus, man soll jenes Ganze, von welchem derselbe gewiße Theile bezeichnet, in b gleiche Theile theilen, und einen solchen Theil, mithin den bten Theil amal nehmen; drückt man das Ganze durch A oder durch 1 aus, so ist der Bruch $\frac{a}{b} = (A : b) \times a$, oder $\frac{a}{b} = (1 : b) \times a$; ist z. B. $a = 3$, und $b = 4$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, wo nun vom Ganzen der 4te Theil 3mal zu nehmen ist (II. §. 2. Zus. II.).

b) Bey einem jeden Bruche kann der Zähler als Dividend, der Nenner als Divisor, und der Bruch selbst als Quotient betrachtet werden (II. §. 5.); d. h., der Bruch $\frac{a}{b} = a : b$; indem der Bruch $\frac{a}{b} = (1 : b) \times a = a : b$ (§. 53. V. Lehrs.), es ist also gleichviel, ob man zwischen dem Zähler und Nenner das Divisions- oder das Bruchzeichen schreibt, weßhalb auch der Bruch $\frac{a}{b}$ wie der Quotient $a : b$ ge-

lelen wird, nämlich a dividirt durch b, oder a divisum per b.

c) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man entweder den Zähler mit dieser Zahl multiplicirt, oder den Nenner damit dividirt; und ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man mit derselben den Zähler dividirt, oder den Nenner damit multiplicirt (II. §. 6.), d. h., $\frac{a}{b} \times m = \frac{am}{b} = \frac{a}{b:m}$; denn der Bruch $\frac{a}{b} = a : b$, nun aber $(a : b) \times m = am : b = a : (b : m)$ (§. 53. V. Lehrs.), also ist $\frac{a}{b} \times m = \frac{am}{b} = \frac{a}{b:m}$; aus dem nämlichen Grunde ist auch $\frac{a}{b} : m = \frac{a:m}{b} = \frac{a}{bm}$.

d) Ein Bruch bleibt unverändert, wenn man den Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt (II. §. 7.), d. h. $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a:m}{b:m}$; denn der Bruch $\frac{a}{b} = a:b$, nun aber $a:b = am : bm$, und $a : b = (a : m) : (b : m)$ (I. §. 64.), daher ist auch $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a:m}{b:m}$.

e) Eine ganze Zahl, im Falle kein Nenner gegeben ist, wird in einen Bruch verwandelt, wenn man unter dieselbe, nachdem man vorhin das Bruchzeichen gemacht hat, 1 als Nenner schreibt; ist aber ein Nenner gegeben, so multiplicirt man die ganze Zahl mit diesem Nenner, und nimmt das Product als Zähler, und den gegebenen Nenner als Nenner des verlangten Bruches (II. §. 8.); z. B. $a = \frac{a}{1}$, und $b = \frac{ab}{a}$.

f) Ein Bruch wird verkleinert, wenn man den Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl dividirt (II. §. 13.); z. B. $\frac{ab}{a} = \frac{ab : a}{a : a} = \frac{b}{1} = b$, $\frac{am + an + ac}{aq + ar} = \frac{(am + an + ac) : a}{(aq + ar) : a} = \frac{m + n + c}{q + r}$, $\frac{x (a - b)}{m (a - b)} = \frac{x (a - b) : (a - b)}{m (a - b) : (a - b)} = \frac{x}{m}$.

g) Mehrere Brüche werden unter einerley Benennung gebracht, wenn man den Zähler eines jeden Bruches mit allen übrigen Nennern, und dann alle Nenner unter sich multiplicirt, und wenn man dann die ersten Producte als Zähler, und das letzte als den gemeinschaftlichen Nenner der neuen Brüche setzt (II. §. 18. a.); z. B. $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} = \frac{14x}{42} + \frac{21x}{42} + \frac{6x}{42}$, $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} + \frac{x}{d} = \frac{bcdx}{abcd} + \frac{acdx}{abcd} + \frac{abdx}{abcd} + \frac{abcx}{abcd}$.

h) Drücken mehrere Brüche Theile des nämlichen Ganzen aus, so ist, im Falle dieselben unter einerley Benennung gebracht worden sind, jener Bruch der größere, der den größeren Zähler hat, und jener der kleinere, der den kleineren Zähler hat; haben sie hingegen gleiche Zähler, so steht ihr Werth mit dem Nenner im umgekehrten Verhältnisse (II. §. 19.); z. B. wenn bey den beiden Brüchen $\frac{m}{a}$, $\frac{n}{a}$ der Zähler m größer ist als n, oder wenn $m > n$, so ist auch $\frac{m}{a} > \frac{n}{a}$, ist aber bey den Brüchen $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ der Nenner $b < c$, so ist $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$.

§. 67.

Die vier Rechnungsarten mit Brüchen in der Buchstaben-Rechnung.

I. Lehrsatz: Die Brüche werden in der Buchstaben-Rechnung eben so, wie in der gemeinen Arithmetik addirt, man bringt sie nämlich allererst unter einerley Benennung, und dividirt dann die Summe aller Zähler durch den General-Nenner (II. §. 24. a. u. b.); d. i., $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} + \frac{x}{d} = \frac{bcdx}{abcd} + \frac{acdx}{abcd} + \frac{abdx}{abcd} + \frac{abcx}{abcd} = \frac{bcdx + acdx + abdx + abcx}{abcd}$.

Beweis: Bringt man die Brüche unter einerley Benennung, so wird ihr Werth nicht verändert (§. 66. d.), es ist also $\frac{x}{a} = \frac{bcdx}{abcd}$, $\frac{x}{b} = \frac{acdx}{abcd}$, $\frac{x}{c} = \frac{abdx}{abcd}$, und $\frac{x}{d} = \frac{abcx}{abcd}$; um deswillen ist auch $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} + \frac{x}{d} = \frac{bcdx}{abcd} + \frac{acdx}{abcd} + \frac{abdx}{abcd} + \frac{abcx}{abcd} = \frac{bcdx + acdx + abdx + abcx}{abcd}$ (II. §. 27.).

II. Lehrsatz: Die Brüche werden in der Buchstaben-Rechnung ebenfalls nach den in der gemeinen Arithmetik aufgestellten Regeln subtrahirt (II. §. 29.); d. i., $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$.

Beweis: Der Werth der Brüche wird dadurch, daß man sie unter einerley Benennung bringt, nicht verändert; daher ist $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd}$ $= \frac{ad - bc}{bd}$

Zusatz: Ein Bruch wird eingerichtet, wenn man das Ganze mit dem Nenner des angehängten Bruches multiplicirt, und den Zähler dieses letzteren zu diesem Producte addirt, oder davon subtrahirt, je nachdem der angehängte Bruch zum Ganzen addirt, oder davon subtrahirt werden soll (II. §. 28.); z. B. $a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$, und $a - \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} - \frac{b}{c} = \frac{ac - b}{c}$.

III. Lehrsatz: Die Brüche werden in der Buchstaben-Rechnung mit einander multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplicirt, und dann das erste Product als Zähler, und das zweyte als Nenner jenes Bruches setzt, der das verlangte Product ausdrückt (II. §. 33.); d. h., $\frac{a}{b} \times - \frac{n}{m} = - \frac{an}{bm}$.

Beweis: $\frac{a}{b}$ mit $\frac{n}{m}$ multipliciren heißt von $\frac{a}{b}$ den mten Theil nmal setzen; der mte Theil von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{a}{bm}$, indem $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}$ (§. 66. c.), und $\frac{a}{bm}$ mit n multiplicirt oder n mal genommen giebt

$\frac{an}{bm}$, indem $\frac{a}{bm} \times n = \frac{an}{bm}$ (§. 66. c.), es ist also, da in Betreff der Zeichen der Grund des Verfahrens schon früherhin angegeben wurde, $\frac{a}{b} \times - \frac{n}{m} = - \frac{an}{bm}$.

I. Zusatz: Bey Brüchen sowohl unter sich, als mit ganzen Zahlen geben die Factoren nach Verwechslung der Stellen einerley Product (II. §. 34.); es ist daher z. B. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$, und somit $\frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db}$, indem $ac = ca$, und $bd = db$ (I. §. 49. und II. §. 5. Zus. IV.).

II. Zusatz: Eine ganze Zahl wird mit einem Bruche multiplicirt, wenn man entweder erstere zu einem Bruche macht, und die beiden Brüche mit einander multiplicirt, oder wenn man dagegen die Stellen der Factoren verwechselt, und dann nach Vorschrift des §. 66. c. verfährt; d. h., $a \times \frac{m}{n} = \frac{a}{1} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{n}$, oder $a \times \frac{m}{n} = \frac{m}{n} \times a = \frac{ma}{n}$ (II. §. 35. b.).

Will man keine dieser beiden Vorschriften befolgen, so multiplicire man die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruches, und dividire das erhaltene Product mit dem Nenner desselben; d. h., $a \times \frac{m}{n} = \frac{am}{n}$, z. B. $4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

III. Zusatz: Ein Product zweyer Brüche wird

durch eine ganze Zahl, oder durch einen Bruch multiplicirt, wenn man nur einen beliebigen Factor damit multiplicirt, und den anderen unverändert wieder als Factor beysetzt; z. B. $(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}) \times 6 = \frac{12}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{24}{5} = \frac{48}{15} = 3\frac{1}{5}$, und $(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}) \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} \times \frac{4}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{12}{28} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$; überhaupt ist $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times n = n\,\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{an}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times n\,\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{cn}{d}$, und $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{m}{n} = \frac{am}{bn} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{cm}{dn} = \frac{am}{b} \times \frac{c}{dn}$; indem $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times n = \frac{ac}{bd} \times n = \frac{acn}{bd} = \frac{an}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{cn}{d}$, und $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{m}{n} = \frac{ac}{bd} \times \frac{m}{n} = \frac{acm}{bdn} = \frac{am}{bn} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{cm}{dn} = \frac{am}{b} \times \frac{c}{dn}$.

IV. Zusatz: Ein Bruch, oder eine ganze Zahl wird mit dem Producte zweyer Brüche multiplicirt, wenn man nur mit einem beliebigen Factor wirklich multiplicirt, und den anderen unverändert als Factor beysetzt; z. B. $8 \times (\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}) = \frac{16}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{32}{5} = \frac{64}{15} = 4\frac{4}{15}$, und $\frac{4}{5} \times (\frac{2}{3} \times \frac{3}{7}) = \frac{8}{15} \times \frac{3}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{12}{35} = \frac{24}{105} = \frac{8}{35}$; allgemein ist $m \times \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) = \frac{am}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{cm}{d}$, und $\frac{m}{n} \times \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) = \frac{am}{bn} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{cm}{dn}$; indem $m \times \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) = m \times \frac{ac}{bd} = \frac{mac}{bd} = \frac{am}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{cm}{d}$, und

$$\frac{m}{n} \times \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) = \frac{m}{n} \times \frac{ac}{bd} = \frac{acm}{nbd} =$$
$$\frac{am}{bn} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{cm}{dn}.$$

V. Lehrsatz: In der Buchstaben-Rechnung werden die Brüche mit einander dividirt, wenn man den Zähler des Dividends mit dem Nenner des Divisors, und den Zähler des Divisors mit dem Nenner des Dividends multiplicirt, und dann das erste Product als Zähler, und das zweyte als Nenner jenes Bruches setzt, der der verlangte Quotient ist (II. §. 39.); d. h., $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{an}{mb}$.

I. Beweis: Auf diese Weise erhält man immerhin eine solche Zahl, die mit dem Divisor multiplicirt den Dividend wieder giebt, weßhalb die so eben aufgestellte Divisionsregel richtig ist (I. §. 61. Zus. I.), oder $\frac{an}{bm} \times \frac{m}{n} = \frac{amn}{mbn} = \frac{a}{b}$, daher ist $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{an}{bm}$

II. Beweis: 1) Der Quotient bleibt unverändert, wenn man den Dividend und den Divisor mit der nämlichen Zahl, somit bey Brüchen mit dem Nenner des Divisors multiplicirt (I. §. 64.), es ist also $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{an}{b} : \frac{mn}{n} = \frac{an}{b} : m$.

2) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man damit entweder den Zähler dividirt, oder den Nenner multiplicirt (§. 66. c.), daher ist $\frac{na}{b} : m = \frac{na}{bm}$, weßhalb auch $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{an}{bm}$ (II. §. 39.).

Einige stellen in Absicht auf die Division der Brüche folgende Regel auf: Man multiplicire den Dividend mit dem umgekehrten Divisor, das Product giebt den verlangten Quotienten; in diesem Falle ist dann $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \times \frac{n}{m} = \frac{an}{bm}$

I. Zusatz: Eine ganze Zahl wird mit einem Bruche multiplicirt, wenn man entweder die ganze Zahl zu einem Bruche macht, und dann nach der für die Division der Brüche aufgestellten Regel verfährt (II. §. 40. b.), oder wenn man dagegen die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multiplicirt, und das erhaltene Product mit dem Zähler desselben dividirt, d. h., $a : \frac{m}{n} = \frac{a}{1} : \frac{m}{n} = \frac{an}{m}$, oder $a : \frac{m}{n} = \frac{an}{m}$, z. B. $4 : \frac{2}{3} = \frac{12}{2} = 6$.

Einige geben auch diese Regel so: Eine ganze Zahl wird mit einem Bruche dividirt, wenn man mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt, d. h., $a : \frac{m}{n} = a \times \frac{n}{m} = \frac{an}{m}$ (§. 67. III. Lehrs. II. Zus.); z. B. $8 : \frac{5}{7} = 8 \times \frac{7}{5} = \frac{56}{5} = 11\frac{1}{5}$.

II. Zusatz: Ein Product zweyer Brüche wird mit einer ganzen Zahl, oder mit einem Bruche dividirt, wenn man nur einen beliebigen Factor damit dividirt, und den anderen wieder unverändert als Factor beysetzt, d. h., $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) : m = \frac{a}{bm} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{dm}$, und $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) : \frac{m}{n} = \frac{an}{bm} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{cn}{dm}$; indem $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) : m = \frac{ac}{bd} : m = \frac{ac}{bdm} = \frac{a}{bm} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{dm}$, und $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{b}\right)$:

$$\frac{m}{n} = \frac{ac}{bd} : \frac{m}{n} = \frac{acn}{bdm} = \frac{an}{bm} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{cn}{dm};$$

z. B. $(\frac{8}{9} \times \frac{4}{5}) : 2 = \frac{4}{9} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{9} \times \frac{2}{5} = \frac{16}{45}$, und $(\frac{8}{9} \times \frac{4}{5}) : \frac{2}{3} = \frac{24}{18} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{9} \times \frac{12}{10} = \frac{96}{90} = 1\frac{6}{90} = 1\frac{2}{30}$.

III. Zusatz: Eine ganze Zahl, oder ein Bruch wird mit dem Producte zweyer Brüche dividirt, wenn man nur mit einem beliebigen Factor dividirt, und den anderen als Divisor beysetzt; d. h., $m : (\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) = \frac{mb}{a} : \frac{c}{d} = \frac{md}{c} : \frac{a}{b}$, und $\frac{m}{n} : (\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) = \frac{mb}{an} : \frac{c}{d} = \frac{md}{cn} : \frac{a}{b}$; indem $m : (\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) = m : \frac{ac}{bd} = \frac{mbd}{ac} = \frac{mb}{a} : \frac{c}{d} = \frac{md}{c} : \frac{a}{b}$, und $\frac{m}{n} : (\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) = \frac{m}{n} : \frac{ac}{bd} = \frac{mad}{bcn} = \frac{ma}{bn} : \frac{c}{d} = \frac{md}{cn} : \frac{a}{b}$; z. B. $8 : (\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}) = \frac{24}{2} : \frac{5}{6} = \frac{48}{5} : \frac{2}{3} = \frac{144}{10} = 14\frac{4}{10} = 14\frac{2}{5}$.

IV. Die zusammengesetzten Brüche werden dadurch in einfache Brüche verwandelt, daß man den Zähler mit dem Nenner derselben wirklich dividirt (II. §. 42.); z. B. $\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5}}{6} = (\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5}) : 6 = \frac{x}{12} + \frac{x}{18} + \frac{x}{30}$, und $\frac{x - 3a - \frac{x + a}{6}}{6} = (x - 3a - \frac{x + a}{6}) : 6 = \frac{x}{6} - \frac{3a}{6} - \frac{x + a}{36}$.

§. 68.

Aufgabe, zwey Zahlen zu finden, wenn die Summe und die Differenz derselben bekannt ist.

Auflösung:

1) Man addire zur halben Summe die halbe Differenz, und man erhält die größere Zahl;

2) Man subtrahire die halbe Differenz von der halben Summe, und man erhält die verlangte kleinere Zahl.

Beweis:

1) Es sey die größere Zahl $= a$, und die kleinere $= b$; dann drückt $(a + b)$ die Summe, und $(a - b)$ die Differenz derselben aus.

2) Die Hälfte von einer Größe erhält man, wenn man sie halbiret, d. h., in zwey gleiche Theile theilet, und sie somit durch 2 dividirt; es ist aber $(a + b) : 2 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, und $(a - b) : 2 = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, es drückt also $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)$ die halbe Summe, und $(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)$ die halbe Differenz der beiden gesuchten Zahlen aus.

3) $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b) + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b) = a$, und $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b) - (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b) = b$, d. h., die größere Zahl erhält man, wenn man zur halben Summe die halbe Differenz der gesuchten Zahlen addirt, und die kleinere erhält man, wenn man von der halben Summe die halbe Differenz derselben subtrahirt; oder

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$
$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$

also ist $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b) + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b) = a$

ferner
$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$
$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$
$$- \quad +$$

also ist $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b) - (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b) = b.$

I. Beyspiel:

Zwey Verwandte erben 20000 fl. so mit einander, daß der Antheil des ersten um 3480 fl. größer ist, als jener des zweyten; wie groß ist nun die Erbschaft eines jeden?

Auflösung:

Weil die Zahl 20000 die Summe, und 3480 fl. die Differenz dieser beiden Erbschaften ausdrückt, so ist der Antheil des ersten oder $a = \frac{1}{2}$ (20000 fl.) $+ \frac{1}{2}$ (3480 fl.) $=$ 10000 fl. $+$ 1740 fl. $=$ 11740 fl., und der Antheil des zweyten oder b ist $= \frac{1}{2}$ (20000 fl.) $- \frac{1}{2}$ (3480 fl.) $=$ 10000 fl. $-$ 1740 fl. $=$ 8260 fl.; indem 11740 fl. $+$ 8260 fl. $=$ 20000 fl., und 11740 fl. $-$ 8260 fl. $=$ 3480 fl., weßhalb die Auflösung dieser Aufgabe richtig ist.

II. Beyspiel:

Zwey Bürger besitzen zusammen 18793 fl. 30 kr., und das Vermögen des ersten ist um 4720 fl. 24 kr. größer, als jenes des zweyten; wie groß ist nun das Vermögen eines jeden?

Auflösung:

Das Vermögen des ersten oder a ist $= \frac{1}{2}$ (18793 fl. 30 kr. $+$ 4720 fl. 24 kr.) $= \frac{1}{2}$ (23513 fl. 54 kr.) $=$ 11756 fl. 57 kr., und das Vermögen des zweyten oder b ist $= \frac{1}{2}$ (18793 fl. 30 kr. $-$ 4720 fl. 24 kr.) $= \frac{1}{2}$ (14073 fl. 6 kr.) $=$ 7036 fl. 33 kr.; indem 11756 fl. 57 kr. $+$ 7036 fl. 33 kr. $=$ 18793 fl. 30 kr., und 11756 fl. 57 kr. $-$ 7036 fl. 33 kr. $=$ 4720 fl. 24 kr.

IV. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit Potenzen.

I.
Einleitung zu den vier Rechnungsarten mit Potenzen.

§. 69.
Erklärungen.

a) Ein Product aus gleichen Factoren wird eine Würde, Dignität, oder Potenz (Potentia) genannt.

Die Anzahl der gleichen Factoren, oder diejenige Zahl, welche ausdrückt, wie oft die nämliche Größe als Factor gesetzt wird, bestimmt den Grad der Potenz, und wird der Exponent derselben (Exponens potentiae) genannt.

Die zweyte und dritte Potenz, wie dieses schon bey Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln in Zahlen bemerkt wurde (§. 25. a. und b.) wird das Quadrat und der Kubus genannt, und die vierte Potenz heißt man das Biquadrat.

b) Eine Potenz wird kürzer dadurch bezeichnet, daß man nur einen Factor ausdrückt, und den Exponenten rechts ober diesen Factor hinschreibt; z. B. $aa = a^2$, $aaa = a^3$, und überhaupt $aaa \dots m = a^m$, wo offenbar die Ausdrücke a^2, a^3, a^m die hier vorkommenden Potenzen einfacher bezeichnen.

Die Größe, welche mehrmal als Factor gesetzt die verlangte Potenz giebt, wird die Urgröße der Potenz genannt; daher ist z. B. bey a^m die Größe a,

welche hier zur Potenz vom mten Grade, oder zur mten Potenz erhoben ist, die U r g r ö ß e, während die rechts oben hingeschriebene Zahl m, welche den Grad dieser Potenz bezeichnet, der E x p o n e n t derselben ist.

c) Die Potenzen werden auch P o t e n z i a l g r ö ß e n genannt, und auf folgende Weise g e l e s e n:

Zuerst liest man das Zeichen, welches, im Falle es + ist, im Anfange gewöhnlich nicht ausgesprochen wird, dann wird der Coefficient, und nach diesem die Urgröße mit dem Exponenten gelesen; die Potenzialausdrücke z. B. $4a^5$, $-6a^m$, $\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{2}}$ ꝛc. werden so gelesen, „vier a der 5ten Potenz, minus sechs a der mten Potenz, zwey Drittel a zur Würde mit dem Exponenten minus ½ erhoben“; dagegen werden die Ausdrücke $(4a)^5$, $(\frac{2}{3}a)^{-\frac{1}{2}}$, $(a+b+c)^3$ ꝛc. so gelesen, „das Product 4a zur 5ten Potenz erhoben, das Product ⅔a zur Würde mit dem Exponenten (—½) erhoben, a + b + c zum Kubus erhoben.“

d) Die n t e W u r z e l von einer Größe, die man allgemein mit a bezeichnen kann, wird jene Zahl genannt, die nmal als Factor gesetzt die vorige Größe wieder giebt; so ist z. B. von a^5 die Größe a die 5 t e W u r z e l, weil $a \times a \times a \times a \times a = a^5$.

Die Zahlen, welche anzeigen, wie oft die Wurzel als Factor zu setzen ist, um die vorige Größe wieder zu geben, werden die E x p o n e n t e n d e r W u r z e l genannt; daher ist 2 bey der Quadratwurzel, 3 bey der Kubikwurzel, und m bey der mten Wurzel der E x p o n e n t d e r W u r z e l.

e) Das W u r z e l z e i c h e n besteht in diesem Zeichen $\sqrt{\ }$, in welches zugleich, um den Grad der Wurzel zu bezeichnen, der Exponent der Wurzel geschrieben wird; die Quadratwurzel allein macht davon eine Ausnahme, indem da der Exponent 2 nicht in das Wurzelzeichen geschrieben wird, und somit hingedacht

werden muß; z. B. $\frac{1}{2}\sqrt{a}$, $\frac{2}{3}\sqrt[3]{b}$, $m\sqrt[n]{x}$ ꝛc. d. h., die halbe Quadratwurzel von a, zwey Drittel der Kubikwurzel von b, die mfache nte Wurzel von x ꝛc. Größen, aus welchen eine gewiße Wurzel ausgezogen werden soll, denen somit das Wurzelzeichen vorsteht, sind **Wurzelgrößen**; z. B. $\frac{1}{2}\sqrt{a}$, $n\sqrt[m]{b}$, $\frac{2}{5}\sqrt[3]{64}$ ꝛc.

f) **Eine Größe zu einer Würde erheben** (Quantitatem ad certam potentiam elevare) heißt sie so oft als Factor setzen, als es der Exponent der Würde ausdrückt; d. h., $(a)^3 = aaa = a^3$, und $(a)^m = aaaa \ldots m = a^m$.

g) Aus einer gegebenen Größe **eine Wurzel ausziehen** (Ex data quantitate radicem extrahere) heißt diejenige Zahl finden, die so oft als Factor gesetzt, als es der Exponent des Wurzelzeichens anzeigt, die vorige Größe wieder giebt; z. B. $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt[m]{a^m} = a$; weil $4 \times 4 = 16$, dann $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, ferner $a \times a = aa = a^2$, $a^m =$ und $a \, . \, a \, . \, a \, . \, . \, m = a^m$.

I. **Zusatz**: Bey der angegebenen Bezeichnungsart einer Potenz kommen jederzeit drey verschiedene Größen vor, nämlich die **Urgröße**, d. i., die **Größe selbst** oder der **Factor**, dann der **Exponent der Würde**, und der **Coefficient** oder jene Zahl, welche angiebt, wie vielmal diese Dignität, oder der wievielte Theil von ihr gegeben sey; z. B., na^m und $\frac{1}{2}b^3$, wo a und b die **Urgrößen**, m und 3 die **Exponenten**, und endlich n und ½ die **Coefficienten** sind.

Eben so kommen auch bey Wurzelgrößen drey verschiedene Größen vor, nämlich diejenige **Größe**, aus der die Wurzel ausgezogen werden soll, ferner der **Exponent des Wurzelzeichens**, welcher den

Grad der Wurzel bezeichnet, und der Coefficient oder die Zahl, welche angiebt, wie vielmal die Wurzelgröße, oder der wievielte Theil derselben vorhanden ist; z. B. $3\sqrt[3]{a}$, und $\frac{2}{3}\sqrt[n]{b^m}$, wo 3 und $\frac{2}{3}$ die Coefficienten, ferner 2 und n die Exponenten der Wurzel, und endlich a^3 und b^m die Größen sind, aus welchen die Wurzel ausgezogen werden soll.

II. Zusatz: Die Potenzen und Wurzeln sind allemal Zahlen, weil nur Zahlen mehrmal als Factoren gesetzt ein bestimmtes Product geben; von Potenzen und Wurzeln gelten also alle jene Sätze, die bisher von ganzen und gebrochenen Zahlen überhaupt sind erwiesen worden.

III. Zusatz: Jede Potenz einer ganzen Zahl ist wieder eine ganze Zahl, weil eine solche Zahl dadurch zu einer verlangten Würde erhoben wird, daß man sie mehrmal als Factor setzt (§. 69. f.), und ganze Zahlen mit einander multiplicirt immer wieder zum Producte eine ganze Zahl geben.

IV. Zusatz: Die Wurzel von einem ächten Bruche ist keine ganze Zahl, weil sonst diese zum Quadrate erhoben wieder eine ganze Zahl (III. Zus.), und nicht einen ächten Bruch gäbe.

V. Zusatz: Wenn eine ganze Zahl am Ende Nullen enthält, so hat das Quadrat doppelt, der Kubus 3mal so viel, und die nte Potenz nmal so viel Nullen, als die anfangs gegebene Zahl; weil beym Quadrate die Größe 2mal, beym Kubus 3mal, und bey der nten Würde nmal als Factor gesetzt wird (§. 69. f.), und das Product allemal am Ende so viele Nullen haben muß, als viel sämmtliche Factoren am Ende haben (I. §. 55.); z. B. $30^4 = 810000$ und $200^5 = 320000000000$, weil $30^4 = 30 \times 30 \times 30 \times 30 = 810000$, und $200^5 = 200 \times 200 \times 200 \times 200 \times 200 = 320000000000$ (§. 34. VII. Zus.).

Anmerkung: 1) Wie Zahlen zum Quadrate und Kubus erhoben, und aus denselben die Quadrat- und Kubikwurzeln ausgezogen werden, ist im I. Hauptstücke dieses Theiles schon gezeigt worden.

2) Die Aufstellung der Regeln, wie die mehrtheiligen allgemeinen Größen, die man mit Buchstaben ausdrückt, zu jeder beliebigen Würde erhoben, und aus denselben die Wurzeln ausgezogen, d. h., wie dieselben potenzirt, und depotenzirt werden, wie auch die Begründung der bey Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln in Zahlen aufgestellten Regeln liegt ausser den Gränzen des gegenwärtigen Lehrbuches; um deswillen führe ich in den folgenden §§. in Absicht auf die Potenzen und Wurzelgrößen nur dasjenige an, was ich für nothwendig erachte, um die vier Rechnungsarten mit den Potenzen, Wurzelgrößen, und den Sexagesimalbrüchen vortragen zu können.

3) Was dieses sagen will „$a^{2/3}$, oder a^{-m} ꝛc., d. h., a zur Würde mit dem Exponenten $2/3$, a zur Würde mit dem Exponenten $(-m)$ erhoben, oder kürzer a zur Würde $2/3$, a zur Würde $(-m)$ erhoben, wird in der Folge, nachdem vorhin gewiße Lehrsätze aufgestellt worden sind, erklärt werden.

§. 70.

Die Grundsätze der Potenzen und Wurzeln.

I. Von gleichen Größen sind alle Potenzen und Wurzeln von einerley Grade gleich; d. i., wenn $a = b$, so ist $a^2 = b^2$, $a^3 = b^3$, und allgemein $a^m = b^m$ (§. 27. I. Zus. und §. 34. I. Zus.); eben so, im Falle $a = b$, ist auch $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$, und allgemein $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ (§. 34. VI. Zus.).

II. Bey ungleichen Zahlen sind die Potenzen und Wurzeln von einerley Grade verschieden, und die größere Zahl giebt eine größere Potenz und Wurzel, als die kleinere; d. i., wenn $a > b$, so ist $a^2 > b^2$, $a^3 > b^3$, und allgemein $a^m > b^m$ (§. 27. II. Zus. und

§. 34. II. Zus.); eben so, wenn $a > b$, ist auch $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$, und überhaupt $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, (§. 34. VI. Zus.)

§. 71.

Lehrsatz:

Die Potenz eines Productes ist ein Product aus den Potenzen der Factoren, oder man erhebt ein Product zu einer verlangten Dignität, wenn man jeden Factor dazu erhebt, und die Potenzen wieder mit einander multiplicirt; d. i., $(ab)^2 = a^2 b^2$, $(ab)^3 = a^3 b^3$, und allgemein $(ab)^m = a^m b^m$ (§. 27. III. Zus. und §. 34. III. Zus.).

Beweis:

1) Ein Product zum Quadrate, zum Kubus, oder überhaupt zur mten Würde erheben, heißt dasselbe 2 „ 3 „ oder mmal als Factor setzen (§. 69. f.), also ist $(ab)^2 = ab \times ab$, $(ab)^3 = ab \times ab \times ab$, und $(ab)^m = ab \,.\, ab \,.\, ab \,.\, ab \,....\, m$.

2) $ab \times ab = abab$ (§. 54.) $= aabb$ (I. §. 49.) $= a^2 b^2$ (§. 69. b.), ferner $ab \times ab \times ab = ababab = aaabbb = a^3 b^3$, und $ab \,.\, ab \,.\, ab \,....\, m = aaa \,...\, m \times bbb \,...\, m = a^m b^m$.

3) Also ist auch $(ab)^2 = a^2 b^2$, $(ab)^3 = a^3 b^3$, und allgemein $(ab)^m = a^m b^m$; z. B. $(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4 = 16 \times 81 = 1296$.

I. Zusatz: Die Wurzel eines Productes ist wieder ein Product aus den Wurzeln der Factoren, oder aus einem Producte wird eine Wurzel ausgezogen, wenn man sie aus jedem Factor auszieht, und diese Wurzeln

wieder mit einander multiplicirt; d. i., $\sqrt{(ab)} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{(ab)} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$, und allgemein ist $\sqrt[n]{(ab)} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

Der Grund des Verfahrens liegt darin, weil $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = ab$, $(\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b})^3 = ab$, und $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = ab$; indem man die nämliche anfangs gegebene Größe erhält, wenn man dieselbe zur nämlichen Würde erhebt, und daraus wieder die nämliche Wurzel auszieht; z. B. $\sqrt{(9 \times 16)} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$, und $\sqrt[3]{(8 \times 27)} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{27} = 2 \times 3 = 6$.

Eben so ist z. B. auch $(abcd)^m = a^m b^m c^m d^m$, und $\sqrt[n]{(abcd)} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\sqrt[n]{d}$.

§. 72.

Lehrsatz:

Die Potenz eines Bruches ist wieder ein Bruch aus der Potenz des Zählers und Nenners, oder man erhebt einen Bruch zu einer verlangten Dignität, wenn man den Zähler sowohl, als den Nenner dazu erhebt, und die erste Potenz als Zähler, und die zweyte als Nenner jenes Bruches setzt, der die verlangte Potenz des gegebenen Bruches ausdrückt (§. 27. IV. Zus. u. §. 34. IV. Zus.); d. i., $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$, dann $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$, und allgemein $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Beweis:

1) Einen Bruch zu einer Potenz erheben, heißt

denselben so oft als Factor setzen, als es der Exponent der Würde anzeigt, es ist also $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, und $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots . m$.

2) $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}$ (§. 69. b.), $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$, und $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots m = \frac{aaa \ldots m}{bbb \ldots m} = \frac{a^m}{b^m}$.

3) Daher ist auch $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$, und $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$; z. B. $(2/3)^4 = \frac{2^4}{3^4}$ $= 16/81$, und $(1/2)^6 = \frac{1^6}{2^6} = 1/64$.

I. Zusatz: Die Wurzel eines Bruches ist wieder ein Bruch aus der Wurzel des Zählers und Nenners, oder man zieht aus einem Bruche die verlangte Wurzel aus, wenn man sie sowohl aus dem Zähler als dem Nenner auszieht, und dann die Wurzel des Zählers durch jene des Nenners dividirt (§. 32. und §. 39.); d. i., $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, dann $\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, und allgemein ist $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Der Grund liegt darin, weil $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$,

$\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 = \frac{a}{b}$, und $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$; z. B.

$\sqrt{4/16} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}} = 2/4$, und $\sqrt[3]{3/8} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

II. Zusatz: Die Potenz eines ächten Bruches (§. 27. V. Zus. u. §. 34. V. Zus.) ist wieder ein ächter Bruch; d. i., wenn $a < b$, und somit $\frac{a}{b}$ ein ächter Bruch ist, so sind auch die Brüche $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, und allgemein $\frac{a^m}{b^m}$ ächte Brüche; indem dann auch $a^2 < b^2$, $a^3 < b^3$, und überhaupt $a^m < b^m$ (§. 70. II.); z. B. $(1/2)^4 = 1/16$, wo $1 < 16$.

III. Zusatz: Die Potenz eines unächten Bruches, dessen Zähler so groß oder größer ist, als der Nenner, ist wieder ein solcher unächter Bruch; d. i., wenn $a = b$, oder $a > b$, und somit $\frac{a}{b}$ überhaupt einen unächten Bruch ausdrückt, so sind die Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2}{b^2}$, und allgemein $\frac{a^m}{b^m}$ wieder unächte Brüche, indem dann auch $a^2 = b^2$, $a^3 = b^3$, und $a^m = b^m$, ferner $a^2 > b^2$, $a^3 > b^3$, und überhaupt $a^m > b^m$ (§. 70. I. u. II.); z. B. $(2/2)^4 = 16/16$, und $(3/2)^5 = 243/32$, wo wieder $16 = 16$, und $243 > 32$.

Erhebt man also was für einen Bruch zu einer

verlangten Dignität, so ist die Potenz allemal wieder ein Bruch der nämlichen Art.

IV. Zusatz: Wenn die Wurzel einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ist, welches man daraus erkennt, wenn zuletzt bey Ausziehung der Wurzel ein Rest bleibt, so ist sie auch kein Bruch, indem sonst die Potenz, d. h., die gegebene Zahl gegen die Annahme ein Bruch sein müßte; eine solche Wurzel läßt sich nie vollständig angeben, und wird deßhalb, wie ich dieses schon bemerkte, eine Irrationalzahl genannt, gleichwie diejenigen Wurzeln, die sich vollständig ausdrücken lassen, Rationalzahlen sind; z. B. die Wurzeln $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{119}$ ꝛc. sind Irrationalzahlen, dagegen ist die Quadratwurzel von 64, oder $\sqrt{64} = 8$ eine Rationalzahl.

Die Wurzeln, welche Irrationalzahlen sind, lassen sich durch Annäherung so genau bestimmen, als es die vorliegende Aufgabe erfodert, wie dieses in Absicht auf die Quadrat- und Kubik-Wurzeln im §. 30. und §. 37. schon gezeigt wurde.

§. 73.

Lehrsatz:

I. Jede Potenz einer positiven Größe ist positiv;

II. Von einer negativen Urgröße sind alle Potenzen mit geraden Exponenten positiv, und

III. Von einer solchen Größe sind alle Potenzen mit ungeraden Exponenten negativ; d. i.

$$\text{I. } (+a)^m = +a^m;\ \text{II. } (-a)^{2m} = +a^{2m};$$

$$\text{und III. } (-a)^{2m+1} = -a^{2m+1}.$$

Beweis von I.

1) Eine positive Größe zu einer Würde erheben, heißt dieselbe so oft als Factor setzen, als es der Ex-

ponent anzeigt; die Potenz einer positiven Größe ist demnach ein Product aus lauter positiven Factoren.

2) Bey der Multiplication geben gleiche Zeichen im Producte das Zeichen (+); d. h., $(+a)^2 = +a \times +a = +a^2$, $(+a)^3 = +a \times +a \times +a = +a^3$, und überhaupt $(+a)^m = +a \times +a \times +a \ldots . m = +a^m$; z. B. $(+2)^3 = +2^3 = +8$ (§. 56.)

Beweis von II.

1) Jede Potenz einer negativen Größe mit einem geraden Exponenten läßt sich durch $(-a)^{2m}$ ausdrücken (§. 65.), und ist daher ein Product aus 2m gleichen Factoren, mithin aus m Paaren von solchen Factoren.

2) Das Product eines jeden Paares, indem alle Factoren das Zeichen (—) haben, ist positiv, mithin ist es die Potenz ebenfalls, oder $(-a)^2 = -a \times -a = +a^2$, $(-a)^4 = -a \times -a \times -a \times -a = +a^4$, und überhaupt $(-a)^{2m} = -a \times -a \times -a \ldots . 2m = +a^{2m}$; z. B. $(-3)^2 = +9$, und $(-2)^4 = +16$.

Beweis von III.

1) Die Potenz einer negativen Urgröße mit einem geraden Exponenten ist positiv, oder $(-a)^{2m} = +a^{2m}$

2) Um die negative Größe (— a) zur Würde mit dem Exponenten (2m + 1) zu erheben, muß man das positive Product $(+a)^{2m}$ noch einmal mit

der negativen Größe (— a) multipliciren, weßhalb die verlangte Potenz negativ ist, oder $(-a)^{2m+1} = -a \times -a \times -a \ldots (2m+1) = -a^{2m+1}$; z. B. $(-2)^3 = -8$, und $(-\frac{1}{2})^5 = -\frac{1}{32}$

I. Zusatz: Die Wurzel mit einem geraden Exponenten aus einer positiven Größe kann positiv oder negativ seyn; z. B. $\sqrt{4}$ ist $+2$ oder -2, d. i., $4\sqrt{} = \pm 2$, weil $(+2)^2 = +4$, und $(-2)^2 = +4$.

II. Zusatz: Die Wurzel mit einem ungeraden Exponenten hat das Zeichen der Größe oder Dignität; z. B. $\sqrt[3]{+8} = +2$, und $\sqrt[3]{-8} = -2$, weil $(+2)^3 = +8$, und $(-2)^3 = -8$.

III. Zusatz: Aus einer negativen Größe läßt sich keine Wurzel mit einem geraden Exponenten angeben, man heißt daher solche Wurzelgrößen unmögliche, oder eingebildete Größen; z. B. $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-3}$, und überhaupt $\sqrt[2n]{-a}$.

II.

Rechnungsarten mit Potenzen.

§. 74.

Erklärungen.

a) Potenzen von einerley Urgrößen, und einerley Exponenten sind gleichartig (§. 43. f.), z. B. $+3a^2$, $-5a^2$; hingegen, wenn die Größen, oder die Exponenten, oder beide zugleich verschieden sind, ungleichartig, z. B. $3a^2$, $2b^2$, $4a^3$.

b) Potenzen von gleichen Exponenten sind gleichnamig, z. B. a^3, b^3; sind aber die Exponenten verschieden, so sind sie ungleichnamig, z. B. a^2, a^3.

I. Zusatz: Gleichartige Potenzen sind jederzeit gleichnamig, weil bey denselben die Urgrößen immer die nämlichen Exponenten haben; hingegen aber sind die gleichnamigen Potenzen nicht allemal gleichartig, indem dabey die Urgrößen verschieden seyn können.

II. Zusatz: Eine Größe mit dem Exponenten 1 ist die unveränderte Größe selbst; d. i., $a^1 = a$, indem der Exponent 1 ausdrückt, daß die Größe a nur einmal als Factor gesetzt sey; z. B. $6^1 = 6$.

So oft demnach eine Größe keinen Exponenten hat, so versteht man allezeit 1 als Exponenten d. i., $a = a^1$.

§. 75.

Regel der Addition in Absicht auf die Potenzen.

a) Sind die Potenzen gleichartig, und haben sie gleiche Zeichen, so werden sie dadurch addirt, daß man sie zusammenzählet, d. h., ihre Coefficienten addirt, und der Summe das Zeichen der Summanden giebt.

b) Sind die Potenzen gleichartig, und haben sie ungleiche Zeichen, so werden sie dadurch addirt, daß man die kleinere von der größeren abzieht, und dem Reste das Zeichen der größeren giebt.

c) Sind endlich die Potenzen ungleichartig, so können sie nicht addirt, d. h., zu einem Ganzen verbunden werden, man setzt sie also mit ihren Zeichen unverändert neben einander hin (§. 47. und §. 48.); z. B.

Summanden $\begin{cases} 4a^2 - 6a^3b + \frac{2}{3}d^3 + e^n - 18f^2 \\ 6a^2 + 2a^3b - 4d^3 + e^m - 12f^2 \end{cases}$

Summe $= 10a^2 - 4a^3b - \frac{10}{3}d^3 + e^m + e^n - 30f^2.$

§. 76.

Regel der Subtraction in Absicht auf die Potenzen.

1) Man schreibe den Subtrahend unter den Minuend, und ziehe unten eine Linie.

2) Man verändere im Subtrahend die Zeichen, und addire ihn dann zum Minuend (§. 49.); z. B.

Minuend	$12a^3 - 4a^2b - \frac{1}{3}d^4 + e^m + 24g^2$
Subtrahend	$8a^3 - 20a^2b + \frac{1}{4}d^4 - \frac{1}{2}e^n - 6g^2$
	$- \quad + \quad - \quad + \quad +$
Rest	$= 4a^3 - 16a^2b - \frac{7}{12}d^4 + e^m + \frac{1}{2}e^n + 30g^2$

§. 77.

Lehrsatz:

Potenzen von einerley Urgrößen werden multiplicirt, wenn man im Producte die Urgröße der Factoren einmal schreibt, und ihr als Exponent die Summe der Exponenten derselben giebt, oder, wie man sich kürzer ausdrückt, Potenzen von gleichen Größen werden multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt; d. i., $a^3 \times a^2 = a^5$, und überhaupt, wenn m und n ganze Zahlen sind, $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Beweis:

1) $a^3 = aaa$ (§. 69. b.)
und $a^2 = aa$

also ist $a^3 \times a^2 = aaaaa = a^5$.

2) $a^m = aaa \ldots m$
und $a^n = aaa \ldots n$

also ist $a^m \times a^n = aaa \ldots (m + n) = a^{m+n}$.

Es ist nämlich das Product $a^m \times a^n$ ein Product aus m Factoren von a, und aus n Factoren vom

vom nämlichen a, mithin ist solches ein Product aus $(m + n)$ Factoren von a, d. h., $a^m \times a^n = aaaa \ldots m \times aaa \ldots n = aaaa \ldots (m + n) = a^{m + n}$; z. B. $3^2 \times 3^3 = 3^{2 + 3} = 3^5$.

I. Zusatz: Potenzen von gleichen Urgrößen werden dividirt, wenn man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividends subtrahirt, und im Quotienten diesen Rest als Exponenten der nämlichen Urgröße setzt; d. i., $a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3$, und überhaupt $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Denn $a^2 \times a^3 = a^5$, und $a^n \times a^{m-n} = a^{m + n - n} = a^m$ (I. §. 61. Zus. I.); überdieß ist

$$a^5 = aaaaa \quad (\S. 69. b.)$$

und $a^2 = aa$

also ist $a^5 : a^2 = \frac{aaaaa}{aa} = aaa = a^3$;

eben so ist $a^m = aaaa \ldots m$

und $a^n = aaa \ldots n$

also ist $a^m : a^n = \frac{aaa \ldots m}{aaa \ldots n} = aaa \ldots (m - n) = a^{m-n}$.

II. Zusatz: Jede Zahl mit dem Exponenten 0 ist $= 1$, d. i., $a^0 = 1$.

Um dieses zu beweisen, setze man a sich selbst gleich, schreibe a unten auf die eine, und 1 auf die andere Seite ohne ein dazwischen gesetztes Zeichen hin, und multiplicire beiderseits, man erhält gleiche Producte, und zugleich hat man auch gleiche Multiplicanden, indem $a = a$, also müssen auch, da nur Gleiches mit Gleichem multiplicirt wieder Gleiches giebt, die Multiplicatoren gleich seyn, weßhalb $a^0 = 1$; oder

$$\begin{array}{ccc} a & = & a \\ a^0 & & 1 \\ \hline a & = & a \end{array}$$

Wie nun hier $a = a$, so muß auch $a^0 = 1$ seyn.

Wäre a^0 größer oder kleiner als 1, so müßte auch a größer oder kleiner als a seyn; indem

$$\begin{array}{ll} a = a & a = a \\ \text{ist nun } a^0 > 1 & \text{ist nun } a^0 < 1 \\ \hline \text{so ist } a > a & \text{so ist } a < a \end{array}$$ (I. §. 46. II.)

Weil jede Größe sich selbst gleich ist, und der nämliche Buchstabe in der nämlichen Rechnung immer auch die nämliche Größe bezeichnet (§. 43. b.), so kann unmöglich a größer oder kleiner als a seyn, es muß also auch aus diesem Grunde $a^0 = 1$ seyn; daher ist z. B. $123^0 = 1$, und $(2/3)^0 = 1$.

III. Zusatz: Eine Potenz mit einem negativen Exponenten ist einem Bruche gleich, dessen Zähler 1, und dessen Nenner die nämliche Potenz mit dem positiven Exponenten ist, d. h., $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; und umgekehrt ist ein Bruch, dessen Zähler 1, und der Nenner eine Würde mit einem negativen Exponenten ist, gleich der nämlichen Würde mit dem positiven Exponenten, d. i., $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$.

Um dieses zu bewiesen, verwandle man a^{-m} in einen Bruch mit dem Nenner 1, es ist dann $a^{-m} = \frac{a^{-m}}{1}$ (§. 66. e.); dann multiplicire man den Zähler und Nenner dieses Bruches mit der nämlichen Zahl a^m, es ist $\frac{a^{-m}}{1} = \frac{a^{-m} \times a^m}{a^m}$ (§. 66. d.) $= \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$ (II. Zus.), also ist $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; oder $a^{-m} = \frac{a^{-m}}{1} = \frac{a^{-m} \times a^m}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$ und deßhalb ist auch $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$; z. B. $6^{-2} = \frac{1}{6^2}$

$= 1/36$, und $(3/4)^{-3} = \frac{1}{(3/4)^3} = \frac{1}{27/64} = 1 : 27/64$
$= 64/27$.

Daß $a^0 = 1$, und $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, kann auch so bewiesen werden:

I. $a^0 = a^{1-1} = a^1 : a^1 = a : a = 1$, also ist $a^0 = 1$;

II. $a^{-m} = a^{m-2m} = a^m : a^{2m} = a^m : a^m \times a^m = 1 : a^m = \frac{1}{a^m}$, also ist auch $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

IV. Zusatz: Potenzen von einerley Urgrößen werden nach der nämlichen Regel multiplicirt, es mögen die Exponenten das Zeichen (+) oder (—) vor sich haben; d. i., $a^{-m} \times a^{-2m} = a^{-3m}$.

Denn $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (III. Zus.), und $a^{-2m} = \frac{1}{a^{2m}}$, also ist $a^{-m} \times a^{-2m} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^{2m}} = \frac{1}{a^{3m}} = a^{-3m}$.

Eben so ist z. B. $4^5 \times 4^{-3} = 4^2$, und $x^2 \times x^{-1} = x^1 = x$.

V. Zusatz: Potenzen von einerley Urgrößen werden auch nach der nämlichen Regel dividirt, es mögen die Exponenten das Zeichen (+) oder (—) vor sich haben; d. i., $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n} = a^{n-m}$.

Denn a^{-m} ist $= \frac{1}{a^m}$ (III. Zus.)

und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

---

also ist $a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} =$

$a^{n-m} = a^{-m+n}$ (§. 48. Nro. 1.).

Eben so ist $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$, und $a^{-m} : a^n = a^{-m-n}$.

Daß $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n} = a^{n-m}$, $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$, und $a^{-m} : a^n = a^{-m-n}$, ist auch daher ersichtlich, weil $a^{-n} \times a^{-m+n} = a^{-m+n-n} = a^{-m}$, $a^{-n} \times a^{m+n} = a^{-n+m+n} = a^m$, und $a^n \times a^{-m-n} = a^{n-m-n} = a^{-m}$ (I. §. 61. I. Zus.).

§. 78.

Lehrsatz:

Eine Potenz wird zu einer verlangten Dignität erhoben, wenn man den Coefficienten zur verlangten Würde erhebt, und dann den Exponenten der Potenz mit dem Exponenten der verlangten Dignität multiplicirt; d. i., $(3a^3)^2 = 9a^6$, und überhaupt, wenn m und n ganze Zahlen sind, ist $(a^m)^n = a^{mn}$.

Beweis:

$(3a^3)^2 = 3a^3 \times 3a^3 = 9a^{3+3}$ (§. 77.) $9a^{3 \cdot 2} = 9a^6$. Eben so ist $(a^m)^n = a^m \,.\, a^m \,.\, a^m \,....\, n = a^{m+m+m \,....\, n} = a^{mn}$.

Daher ist z. B. $(3^2)^3 = 3^6 = 729$.

1. Zusatz: Aus einer Potenz wird eine verlangte Wurzel ausgezogen, wenn man die Wurzel aus dem Coefficienten auszieht, und dann den Exponenten der

Potenz mit dem Exponenten der verlangten Wurzel dividirt; giebt der Quotient keine ganze Zahl, so setzt man den Exponenten der Wurzel als Nenner unter den Exponenten der Potenz; d. h., $\sqrt[3]{27a^2} = 3a^{2/3}$, und $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; indem $(3a^{2/3})^3 = 27a^2$, und $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$.

Ein Potenz, die zum Exponenten einen Bruch hat, nennt man eine **Potenz mit einem gebrochenen Exponenten**; z. B. $a^{1/2}$, $a^{\frac{m}{n}}$ rc.

II. **Zusatz**: Jede Wurzelgröße (§. 69. e.) läßt sich auf den Ausdruck einer Potenz mit einem gebrochenen Exponenten bringen, und umgekehrt kann eine solche Potenz immerhin als eine Wurzelgröße ausgedrückt werden; d. i., $\sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}$, und $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, und umgekehrt ist $a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$, und $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Weil $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ (II. Zus.), so bezeichnet der Ausdruck $a^{\frac{n}{m}}$ die mte Wurzel der nten Potenz von a, und zeigt somit an, es soll aus der nten Potenz von a die mte Wurzel ausgezogen werden; z. B. $4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$. (§. 69. Anm. 3.).

III. **Zusatz**: Potenzen von einerley Urgrößen mit gebrochenen Exponenten werden nach der im §. 77. aufgestellten Regel mit einander multiplicirt und dividirt; d. i.,

$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{r}{p}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{r}{p}} = a^{\frac{mp + nr}{pn}}$, und $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{p}}$ $= a^{\frac{m}{n} - \frac{r}{p}} = a^{\frac{mp - nr}{np}}$.

Denn $\frac{m}{n} = \frac{mp}{np}$, und $\frac{r}{p} = \frac{rn}{pn}$, daher ist $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{r}{p}} = a^{\frac{mp}{np}} \times a^{\frac{rn}{pn}} = \sqrt[np]{a^{mp}} \times \sqrt[np]{a^{rn}}$ (II. Zus.) $= \sqrt[np]{(a^{mp} \times a^{rn})}$ (§. 71.) $= \sqrt[np]{a^{mp + rn}}$ (§. 77.) $= a^{\frac{mp + rn}{np}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{r}{p}}$.

Eben so ist auch $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{p}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{r}{p}} = a^{\frac{mp - rn}{np}}$; indem $a^{\frac{r}{p}} \times a^{\frac{mp - rn}{np}} = a^{\frac{r}{p} + \frac{mp - rn}{np}} =$ $a^{\frac{nr + mp - nr}{np}} = a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}}$; z. B. $a^{2/3} : a^{1/2} = a^{2/3 - 1/2}$ $= a^{1/6}$, und $4^{3/2} : 4^{1/2} = 4^{3/2 - 1/2} = 4^{2/2} =$ $4^1 = 4$.

§. 79.

Lehrsatz:

I. Eine Wurzelgröße wird zu einer beliebigen Dignität erhoben, wenn man sowohl den Coefficienten als auch die nach dem Wurzelzeichen stehende Größe zur verlangten Würde erhebt; d. i., $(4\sqrt[3]{a})^2 = 16\sqrt[3]{a^2}$ und $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

II. Aus einer Wurzelgröße wird eine beliebige Wurzel ausgezogen, wenn man die verlangte Wurzel aus dem Coefficienten, und dann aus der nach dem Wurzelzeichen

stehende Größe dadurch auszieht, daß man die Exponenten der Wurzeln mit einander multiplicirt: d. i., $\sqrt[3]{(27\sqrt[n]{a})} = 3\sqrt[3n]{a}$, und $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[mn]{a}$.

Beweis von I.

1) $4\sqrt[3]{a} = 4a^{1/3}$ (§. 78. I. Zus.), daher ist auch $(4\sqrt[3]{a})^2 = (4a^{1/3})^2 = 16a^{2/3}$ (§. 78.) $= 16\sqrt[3]{a^2}$.

2) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, daher ist auch $(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Beweis von II.

1) $27\sqrt[n]{a} = 27a^{\frac{1}{n}}$, daher ist auch $\sqrt[3]{(27\sqrt[n]{a})} = \sqrt[3]{(27a^{\frac{1}{n}})} = 3a^{\frac{1}{3n}} = 3\sqrt[3n]{a}$.

2) $\sqrt[n]{} = a^{\frac{1}{n}}$, daher ist auch $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[m]{(a^{\frac{1}{n}})} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$.

Um deswillen ist z. B. $(\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$, und $\sqrt[3]{(\sqrt{64})} = \sqrt[6]{64} = 2$, indem $8^2 = 8.8 = 64$, und $2^6 = 2.2.2.2.2.2 = 64$.

Der Grund, warum sowohl bey Potenzen (§. 78.), auch bey Wurzelgrößen der Coefficient zur verlangten Würde erhoben, oder daraus die verlangte Wurzel ausgezogen werden soll, liegt darin, weil der Coefficient mit seiner Größe, da er ausdrückt, wie oft diese Größe oder der wievielte Theil derselben vorhanden ist, ein Product bildet, und bey Producten alle einzelnen Factoren zur verlangten Würde erhoben werden

(§. 71.), oder daraus die verlangte Wurzel ausgezogen wird (§. 71. Zus.).

Zusatz: $3\sqrt{a}$ mit 2 multiplicirt ist auch gleich $6\sqrt{a}$, oder $3\sqrt{a} \times 2 = 6\sqrt{a}$, weil $3\sqrt{a} \times 2 = 3\sqrt{a} + 3\sqrt{a}$ (I. 45. a.) $= 6\sqrt{a}$.

Eben so ist $\sqrt[n]{a} \times 3 = 3\sqrt[n]{a}$, dann $\sqrt[n]{a} \times 2/3 = \frac{2}{3}\sqrt[n]{a}$, und $\sqrt[n]{a} \times q = q\sqrt[n]{a}$; weil $\sqrt[n]{a} \times 3 = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} = 3\sqrt[n]{a}$, dann $\sqrt{a} \times \frac{2}{3} = \sqrt{a} \times (\frac{1}{3} \times 2) = \frac{1}{3}\sqrt{a} \times 2 = \frac{2}{3}\sqrt{a}$, und $\sqrt[n]{a} \times q = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} + \ldots q = q\sqrt[n]{a}$; indem bey der Wurzelgröße $3\sqrt{a}$ der Coefficient 3 anzeigt, daß die Wurzelgröße $\sqrt[n]{a}$ dreymal als Summand gesetzt sey, gleichwie $\frac{2}{3}\sqrt{a}$ ausdrückt, daß von $\sqrt{a}$ der 3te Theil 2mal, und bey $q\sqrt[n]{a}$ der Coefficient q anzeigt, daß die Wurzelgröße $\sqrt[n]{a}$ so oft, als es q angiebt, mithin qmal gesetzt sey.

§. 80.

Regel der Multiplication und Division zusammengesetzter Potenzen.

Auflösung:

1) Um zusammengesetzte Potenzen, d. h., mehrtheilige oder mehrgliederichte Potenzen mit einander zu multipliciren, und zu dividiren, verfahre man ganz nach den in den §§. 58. und 59. aufgestellten Regeln, und bestimme, im Falle die Urgrößen der Potenzen die nämlichen sind, die einzelnen Producte und Quotienten nach den bisher in Absicht auf die Potenzen aufgestellten Lehrsätzen.

2) Potenzen von verschiedenen Urgrößen werden im Producte ohne ein dazwischen gesetztes Zei-

chen neben einander gesetzt, und im Quotienten schreibt man sie, indem sie nicht unmittelbar durch einander dividirt werden können, mittels der bekannten Divisionszeichen zusammen, während dann die Zeichen und Coëfficienten sowohl im Producte als auch im Quotienten nach den bey der Multiplication und Division aufgestellten Regeln behandelt werden.

3) Weil man im Producte die Stellen der Factoren verwechseln darf (I. §. 49.), so ist es eines, in welcher Ordnung die Factoren im Producte neben einander stehen; indessen schreibt man sie aber doch mehrentheils nach der Ordnung neben einander, wie die Buchstaben im Alphabete auf einander folgen.

I. Beyspiel der Multiplication.

Es soll $4x^2 + 4ax - b^3$ mit $4x^2 - a^2$ multiplicirt werden.

Auflösung:

1) Man nehme einen beliebigen Factor als Multiplicand, und schreibe unter diesen den Multiplicator:

Multiplicand $4x^2 + 4ax - b^3$
Multiplicator $4x^2 - a^2$

---

2) Mit $4x^2$ als dem ersten Gliede des Multiplicators multiplicire man von der Linken zur Rechten alle Glieder des Multiplicands; es ist $4 \times 4 = 16$, $x^2 \times x^2 = x^4$, also $4x^2 \times 4x^2 = 16x^4$, ferner $4 \times 4 = 16$, $x \times x^2 = x^3$, und $a \times x^3 = ax^3$, also ist $+ 4ax \times 4x^2 = 16ax^3$, endlich $1 \times 4 = 4$, $b^3 \times x^2 = b^3x^2$, also ist $- b^3 \times 4x^2 = - 4b^3x^2$, weßhalb $(4x^2 + 4ax - b^3) \times 4x^2 = 16x^4 + 16ax^3 - 4b^3x^2$, welches das erste Partialproduct ist.

3) Mit $-a^2$ als dem zweyten Gliede des Multiplicators multiplicire man wieder den ganzen Multiplicand; es ist $4 \times 1 = 4$, $a^2 \times x^2 = a^2x^2$, also ist $4x^2 \times -a^2 = -4a^2x^2$, ferner $4 \times 1 = 4$, $a \times a^2 = a^3$, $a^3 \times x = a^3x$, also ist $+4ax \times -a^2 = -4a^3x$, endlich $1 \times 1 = 1$, $a^2 \times b^3 = a^2b^3$, also ist $-b^3 \times -a^2 = +a^2b^3$, weßhalb $(4x^2 + 4ax - b^3) \times -a^2 = -4a^2x^2 - 4a^3x + a^2b^3$, welches das zweyte Partialproduct ist.

3) Diese beiden Partialproducte zähle man zusammen, die Summe giebt $16x^4 + 16ax^3 - 4b^3x^2 - 4a^2x^2 - 4a^3x +$ als das verlangte Product:

Multiplicand	$4x^2 + 4ax - b^3$
Multiplicator	$4x^2 - a^2$
Partialproducte	$16x^4 + 16ax^3 - 4b^3x^2$ $-4a^2x^2 - 4a^3x + a^2b^3$
Totalproduct	$16x^4 + 16ax^3 - 4b^3x^2 - 4a^2x^2 - 4a^3x + a^2b^3$.

Daher ist $(4x^2 + 4ax - b^3)(4x^2 - a^2) = 16x^4 + 16ax^3 - 4b^3x^2 - 4a^2x^2 - 4a^3x + a^2b^3$.

II. Beyspiel der Multiplication.

Es soll $a + b$ mit $a - b$ multiplicirt werden.

Auflösung:

Multiplicand	$a + b$
Multiplicator	$a - b$
Partialproducte	$a^2 + ab$ $- ab - b^2$
Totalproduct	$a^2 - b^2$

Es ist also $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; d. h., die Summe zweyer Größen multiplicirt mit ihrer Differenz giebt allezeit zum Producte die Differenz der Quadrate der gegebenen Größen.

I. Beyspiel der Division.

Es soll $16x^4 + 16ax^3 - 4b^3x^2 - 4a^2x^2 - 4a^3x + a^2b^3$ mit $4x^2 + 4ax - b^3$ dividirt werden.

Auflösung:

1) Weil $16x^4$ als das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors, mithin durch $4x^2$ theilbar ist, so dividire man wirklich $16x^4$ durch $4x^2$, man erhält $4x^2$ als den ersten Partialquotienten, indem $16x^4 : 4x^2 = 4x^2$.

2) Mit $4x^2$ multiplicire man den ganzen Divisor, und ziehe das Product vom Dividend ab; es ist $(4x^2 + 4ax - b^3) \times 4x^2 = 16x^4 + 16ax^3 - 4b^3x^2$, weßhalb nach vorgenommener Subtraction als Rest die zusammengesetzte Größe $- 4a^2x^2 - 4a^3x + a^2b^3$ bleibt.

3) Weil $- 4a^2x^2$ durch $4x^2$ theilbar ist, so dividire man $- 4a^2x^2$ durch $4x^2$, man erhält $- a^2$ als den zweyten Partialquotienten, indem $- 4a^2x^2 : 4x^2 = - a^2$.

4) Mit $- a^2$ multiplicire man den ganzen Divisor, und ziehe das Product von dem vorhin gebliebenen Reste ab, es bleibt nach vorgenommener Subtraction nichts mehr übrig, indem $(4x^2 + 4ax - b^3) \times - a^2 = - 4a^2x^2 - 4a^3x + a^2b^3$, und $(- 4a^2x^2 - 4a^3x + a^2b^3) - (- 4a^2x^2 - 4a^3x + a^2b^3) = 0$; um deswillen ist jetzt die Division beendet, und man hat $4x^2 - a^2$ als den verlangten Quotienten gefunden:

Dividend	Quotient
$16x^4 + 16ax^3 - 4b^3x^2 - 4a^2x^2 - 4a^3x + a^2b^3$	$4x^2 - a^2$

$(4x^2 + 4ax - b^3)$ ist der Divisor

$16x^4 + 16ax^3 - 4b^3x^2$

$- \quad - \quad +$

Rest $\quad - 4a^2x^2 - 4a^3x + a^2b^3$

$: (4x^2 + 4ax - b^3)$

$- 4a^2x^2 - 4a^3x + a^2b^3$

$+ \quad + \quad -$

——

Daher ist $(16x^4 + 16ax^3 - 4b^3x^2 - 4a^2x^2 - 4a^3x + a^2b^3) : (4x^2 + 4ax - b^3) = 4x^2 - a^2$.

II. Beyspiel der Division.

Es soll $f^5 + 243$ durch $f + 3$ dividirt werden.

Auflösung:

$$\left.\begin{array}{l} f^5 + 243 \\ : (f + 3) \end{array}\right\} f^4 - 3f^3 + 9f^2 - 27f + 81$$

$$\begin{array}{l}
f^5 + 3f^4 \\
- \quad - \\
\hline
\quad -3f^4 + 243 \\
\quad : (f + 3) \\
\quad -3f^4 - 9f^3 \\
\quad + \quad + \\
\hline
\qquad 9f^3 + 243 \\
\qquad : (f + 3) \\
\qquad 9f^3 + 27f^2 \\
\qquad - \quad - \\
\hline
\qquad\quad -27f^2 + 243 \\
\qquad\quad : (f + 3) \\
\qquad\quad -27f^2 - 81f \\
\qquad\quad + \quad + \\
\hline
\qquad\qquad 81f + 243 \\
\qquad\qquad : (f + 3) \\
\qquad\qquad 81f + 243 \\
\qquad\qquad - \quad - \\
\hline
\end{array}$$

Daher ist $(f^5 + 243) : (f + 3) = f^4 - 3f^3 + 9f^2 - 27f + 81$.

Anmerkung: 1) In Absicht auf die Multiplication mit Potenzen, welche negative Exponenten haben, werden im

letzten Hauptstücke bey den Sexagesimalbrüchen Beyspiele vorkommen.

2) Bey zusammengesetzten Größen findet man anstatt der Einklammerungszeichen auch eine oben gezogene Linie, z. B. $\overline{a + b} \times \overline{a - b}$, d. h., es soll $a + b$ mit $a - b$ multiplicirt werden, welches demnach das Nämliche ausdrückt, wie $(a + b) \times (a - b)$ oder $(a + b)(a - b)$.

3) In der gemeinen Arithmetik ist z. B. $4\frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3}$, und somit eine Summe von vier Ganzen und $\frac{2}{3}$; dagegen aber in der Buchstabenrechnung ist z. B. $a\frac{b}{c} = a \times \frac{b}{c}$ und somit ein Product aus a und $\frac{b}{c}$.

Daher ist auch z. B. $\frac{q + p - r}{q} a = \left(\frac{q + p - r}{q}\right) a = \left(\frac{q + p - r}{q}\right) \times a$, somit ein Product aus dem Bruche $\frac{q + p - r}{q}$ und aus der Größe a.

Eben so wird z. B. anstatt $\sqrt{}(ab)$, und $\sqrt{}(a^2 + 2ab + b^2)$ auch geschrieben $\sqrt{ab}$, und $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$, welches wieder ausdrückt „es soll aus dem ganzen Producte (ab), und aus der ganzen Summe $(a^2 + 2ab + b^2)$ die Quadratwurzel ausgezogen werden.“

4) Die zweytheilige Größe $(a + b)$ mit sich selbst multiplicirt giebt zum Producte, d. h., zum Quadrate $a^2 + 2ab + b^2$, indem $(a + b) \times (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$; dadurch hat man die Formel, nach welcher im §. 29. die Regeln für die Ausziehung der Quadratwurzeln in Zahlen aufgestellt wurden, wo dann, im Falle die Wurzel aus mehr als zwey Ziffern besteht, jedesmal alle vorausgehenden Theile derselben wie ein Theil betrachtet, und durch a ausgedrückt werden, während man den folgenden Theil immer mit b bezeichnet.

5) Die zweytheilige Größe $(a + b)$ dreymal als Factor gesetzt giebt zum Producte, d. i., zum Kubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; indem $(a + b) \times (a + b) \times (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; dadurch bekömmt man dann die Formel, nach welcher im §. 36. die Regeln für die Ausziehung der Kubikwurzeln in Zahlen aufgestellt wurden, wo dann, wenn die Wurzel

mehr als zwey Ziffern hat, die vorausgehenden Theile derselben immer mit a ausgedrückt werden, während der folgende Theil jederzeit mit b bezeichnet wird.

Weil ich in diesem Lehrbuche dem vorliegenden Zwecke gemäß die vier Rechnungsarten mit Potenzen, und nicht auch zugleich die allgemeinen Quadrirungs- und Kubirungs-Gesetze vortragen wollte, so konnte ich die erwähnten Formeln, derer Inhalt in den citirten §§. mit Worten ausgedrückt ist, nicht in der Gestalt, wie sie da stehen, benützen, um nach denselben die Quadrat- und Kubikwurzeln in Zahlen auszuziehen (§. 69. Anm. 2.).

V. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit Wurzelgrößen und Irrationalzahlen.

§. 81.

Erklärungen.

a) Wurzelgrößen (§. 69. e.), die gleiche Größen haben, und aus welchen die nämliche Wurzel ausgezogen wird, heißen **gleichartig**; z. B. $\sqrt[n]{a}$ und $3\sqrt[n]{a}$, ferner $\frac{1}{2}\sqrt[mn]{a}$ und $-4\sqrt[mn]{a}$, dann $+3\sqrt{2}$ und $-2\sqrt{2}$; im Gegentheile aber nennt man sie **ungleichartig**, wenn entweder die Größen, oder die Exponenten der Wurzelzeichen, oder beide zugleich verschieden sind, z. B. $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$, dann $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[m]{a}$, ferner $-2\sqrt[n]{a^2}$ und $3\sqrt[m]{a^3}$, dann $2\sqrt{5}$ und $3\sqrt{7}$.

b) Wurzelgrößen, bey welchen die Exponenten der Wurzelzeichen gleich sind, heißen **gleichnamig**, z. B. $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{b}$; sind aber diese Exponenten verschieden,

so sind die Wurzelgrößen ungleichnamig, z. B. $\sqrt{a}$ und $\sqrt[3]{a}$, ferner $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[m]{b}$ (§. 43. f. und 74. a. u. b.).

Zusatz: Gleichartige Wurzelgrößen sind immerhin auch gleichnamig, weil bey gleichartigen Wurzelgrößen jederzeit die Exponenten der Wurzelzeichen gleich sind; im Gegentheile sind aber die gleichnamigen Wurzelgrößen nicht allemal gleichartig, weil bey den gleichnamigen die Größen selbst verschieden seyn können (§. 74. I. Zus.).

§. 82.

Regel der Addition und Subtraction in Absicht auf die Wurzelgrößen.

Weil sich die Wurzelgrößen auf Potenzen reduciren lassen (§. 78. II. Zus.), so gelten von den Wurzelgrößen die nämlichen Regeln, weßhalb dieselben nach den in den §§. 75. u. 76. aufgestellten Regeln zu einander addirt, und von einander subtrahirt werden.

I. Beyspiel der Addition.

$$\text{Summanden}\begin{cases} 5\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{b} + \sqrt[n]{c^2} + \sqrt[m]{e} + 48 \\ 2\sqrt{a} + 8\sqrt[3]{b} - 4\sqrt[n]{c^2} - \sqrt[n]{e} - 90 \\ -12\sqrt{a} + 16\sqrt[3]{b} - 18\sqrt[n]{c^2} + \sqrt{f} - 12 \end{cases}$$

$$\text{Summe} = -5\sqrt{a} + 21\sqrt[3]{b} - 21\sqrt[n]{c^2} + \sqrt[m]{e} - \sqrt[n]{e} + \sqrt{f} - 54.$$

Wenn sowohl bey Potenzen als auch bey Wurzelgrößen, wie dieses in Absicht auf diese letzteren aus der vorstehenden Auflösung ersichtlich ist, mehr als zwey Summanden vorkommen, so wird nach den im II. Beyspiele des §. 48. ausführlich dargestellten Regeln verfahren, wo nachstehende, auf der Seite 110 angeführten vier Summanden addirt wurden:

1) $4ab - 8cd + fm - 8x + 4y + 12$
2) $-8ab + 8cd - 4fm + 7x + 5y - 9$
3) $-20x - 16y + 16ab + 12fm - 4cd + 30$
4) $15cd + 18 + 40x + 7f + 4g - 3q.$

Nach der in diesem §. vorgenommenen Addition hat man folgende auf Seite 112 ausgesetzte Summe erhalten:

$$\text{Summe} = 12ab + 11cd + 9fm + 19x - 7y + 51 + 7f + 4g - 3q.$$

Anmerkung: Es haben sich in dem besagten §. 48. bey diesem Beyspiele einige Druckfehler eingeschlichen; weß- halb auf Seite 110 beym ersten Summanden im fünften Gliede 4y anstatt 49, beym zweyten Summanden im vierten und fünften Gliede 7x + 5y anstatt 7x59, beym dritten Summanden — 20x anstatt 20x, dann auf Sei- te 111 bey c) anstatt — 8x + 7x + 40x = — 8x + 47x = + 47x — 8x = 39x die Partialsumme — 8x + 7x — 20x + 40x = — 28x + 47x = + 47x — 28x = 19x, und auf Seite 112 in der Summe beym zweyten Gliede 11cd anstatt 15cd gelesen werden muß; gleichwie in dieser Summe zwischen den beiden Summanden + 9fm und — 7y die ausgelassene Partialsumme + 19x zu se- tzen ist, wie man aus der angestellten Vergleichung zwi- schen den hier vorkommenden Summanden und ihrer Summe, und zwischen den im erwähnten Beyspiele des §. 48. auf Seite 110, 111 und 112 stehenden Summan- den und ihrer Summe ersieht.

II. Beyspiel der Addition.

Summanden
$$5 + 3\sqrt{2} - 7\sqrt{3} - 12\sqrt[3]{16} + \sqrt{5}$$
$$8 - 4\sqrt{2} + 9\sqrt{3} - 18\sqrt{16} - \sqrt[3]{7}$$

$$\text{Summe} = 13 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 30\sqrt[3]{16} + \sqrt{5} - \sqrt[3]{7}.$$

I.

I. Beyspiel der Subtraction.

Min. $-5\sqrt{a}+21\sqrt[3]{b}-21\sqrt[n]{c^2}+\sqrt[m]{e}-\sqrt[n]{e}+\sqrt{f}-54$

Subt. $-10\sqrt{a}+24\sqrt[3]{b}-22\sqrt[n]{c^2}-\sqrt[n]{e}+\sqrt{f}-102$

$+ \quad - \quad + \quad + \quad - \quad +$

Rest $= 5\sqrt{a}-3\sqrt[3]{b}+\sqrt[n]{c^2}+\sqrt[m]{e}+48$

II. Beyspiel der Subtraction.

Minuend $5\sqrt{5}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{-1}$

Subtrahend $2\sqrt{5}+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+2\sqrt{-1}$

$- \quad - \quad + \quad -$

Rest $= 3\sqrt{5}-\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{-1}.$

§. 83.

Aufgabe, gegebene Wurzelgrößen, z. B. $\sqrt{a}$ und $\sqrt[n]{b^3}$ gleichnamig zu machen.

Auflösung:

1) Man bringe die gegebenen Wurzelgrößen auf den Ausdruck von Potenzen mit gebrochenen Exponenten (§. 78. II. Zus.), es ist $\sqrt{a} = a^{1/2}$, und $\sqrt[n]{b^3} = b^{\frac{3}{n}}$.

2) Man bringe diese Exponenten, nämlich $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{n}$ unter einerley Benennung (§. 66. g.), man erhält $\frac{n}{2n}$, und $\frac{6}{2n}$, indem $\frac{1}{2} = \frac{n}{2n}$, und $\frac{3}{n} = \frac{6}{2n}$ (§. 66. d.).

3) Man setze diese beiden Brüche von einerley Benennung an die Stelle der vorigen Brüche als

Exponenten, man erhält $a^{\frac{n}{2n}}$ und $b^{\frac{6}{2n}}$, wo nun $a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{n}{2n}}$ und $b^{\frac{3}{n}} = b^{\frac{6}{2n}}$ (§. 70. I.).

4) Diese Potenzen mit gebrochenen Exponenten bringe man auf den Ausdruck von Wurzelgrößen, indem man die Zähler der Exponenten rechts ober die Größen als Exponenten derselben, und den gemeinschaftlichen Nenner beiderseits in das Wurzelzeichen schreibt; man erhält dadurch die gleichnamigen Wurzelgrößen $\sqrt[2n]{a^{n}}$ und $\sqrt[2n]{b^{6}}$, da $a^{\frac{n}{2n}} = \sqrt[2n]{a^{n}}$ und $b^{\frac{6}{2n}} = \sqrt[2n]{b^{6}}$; oder $\sqrt[2]{a} = a^{1/2}$ und $\sqrt[n]{b^{3}} = b^{\frac{3}{n}}$, ferner $a^{1/2} = a^{\frac{n}{2n}} = \sqrt[2n]{a^{n}}$, und $b^{\frac{3}{n}} = b^{\frac{6}{2n}} = \sqrt[2n]{b^{6}}$, somit ist auch $\sqrt{a} = \sqrt[2n]{a^{n}}$ und $\sqrt[n]{b^{3}} = \sqrt[2n]{b^{6}}$, wodurch nun die beiden gegebenen Wurzelgrößen, ohne daß ihr Werth verändert wurde, in die gleichnamigen Wurzelgrößen $\sqrt[2n]{a^{n}}$ und $\sqrt[2n]{b^{6}}$ verwandelt worden sind, wo sowohl aus a^{n} als auch aus b^{6} die 2nte, somit die nämliche Wurzel ausgezogen werden soll.

§. 84.

Regel der Multiplication und Division in Betreff der einfachen Wurzelgrößen.

a) Sind die Wurzelgrößen einfache Größen (Quantitates incomplexae), welche letztere auch eintheilige oder eingliederichte Größen (Quantitates monomiae) genannt werden, (§. 45. II. Zus.), so werden sie nach folgender Regel mit einander multiplicirt und dividirt:

1) Wenn die Wurzelgrößen gleichnamig sind, so multiplicire oder dividire man die Größen vor und nach dem Wurzelzeichen mit einander;

2) Sind sie aber ungleichnamig, so mache man sie nach Vorschrift des vorigen §. gleichnamig, und beobachte dann die so eben bey Nro. 1. angegebene Regel;

3) Ist eine der anfangs gegebenen Größen keine Wurzelgröße, so mache man sie zur Wurzelgröße, indem man sie zur Dignität der Wurzel jener Größe erhebt, mit der sie zu multipliciren oder zu dividiren ist, und setze ihr das Wurzelzeichen mit dem nämlichen Exponenten vor. Z. B.

$2\sqrt{a} \times 3\sqrt{c} = 6\sqrt{ac}$, und $12\sqrt[3]{a^2} \times 6\sqrt{a} = 72\sqrt[6]{a^7}$; eben so ist $4\sqrt{a} : 5\sqrt{b} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{a}{b}}$, dann $48\sqrt[m]{a^4} : 6\sqrt[n]{a^3} = 8\sqrt[mn]{a^{4n-3m}}$, und $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{d} = \sqrt[m]{ad}$.

Grund des Verfahrens:

I. $2\sqrt{a} \times 3\sqrt{c} = 2a^{1/2} \times 3c^{1/2}$ (§. 78. II. Zus.) $= 6a^{1/2}c^{1/2}$ (§. 80. Nro. 2.) $= 6(ac)^{1/2}$ (§. 71.) $= 6\sqrt{ac}$, und $12\sqrt[3]{a^2} \times 6\sqrt{a} = 12\sqrt[6]{a^4} \times 6\sqrt[6]{a^3}$ (§. 83.) $= 72\sqrt[6]{a^7}$.

II. Eben so ist $4\sqrt{a} : 5\sqrt{b} = 4a^{1/2} : 5b^{1/2} = \frac{4}{5}(a^{1/2} : b^{1/2}) = \frac{4}{5}(a : b)^{1/2} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{a}{b}}$, und $48\sqrt[m]{a^4} : 6\sqrt[n]{a^3} = 48\sqrt[mn]{a^{4n}} : 6\sqrt[mn]{a^{3m}} = 8\sqrt[mn]{a^{4n-3m}}$.

III. Weil $d = \sqrt[m]{d^m}$, so ist $\sqrt[m]{a} \times d = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{d^m} = \sqrt[m]{ad^m}$, und somit $\sqrt[m]{ad^m}$ das verlangte Product der beiden gegebenen Factoren, wovon der einer eine, und der andere keine Wurzelgröße ist.

Anmerkung: Man kann z.B. im Producte $6\sqrt{\overline{ac}}$ und $\frac{4}{5}\sqrt[5]{\overline{ab}}$ die oben gezogene Linie, welche ausdrückt, daß aus dem ganzen Producte, somit aus jedem Factor (§. 71. I. Zus.) die Quadratwurzel ausgezogem werden soll (§. 80. Anm. 2.), auch weglassen, und dagegen schreiben $6\sqrt{ac}$ und $\frac{4}{5}\sqrt[5]{ab}$; indem der so eben aufgestellten Regel gemäß die Wurzelgrößen gleichnamig seyn müssen, damit die Größen vor und nach dem Wurzelzeichen mit einander multiplicirt werden können, und es sich also bey solchen Ausdrücken von selbst versteht, daß aus dem ganzen Producte die Wurzel soll ausgezogen werden.

§. 85.

Regel der Multiplication und Division zusammengesetzter Wurzelgrößen.

Sind die Wurzelgrößen zusammengesetzte Größen (Quantitates complexae), welche letztere auch, im Falle sie aus zwey, drey, oder überhaupt aus mehreren Gliedern bestehen, zwey-, drey- oder mehrtheilige Größen (Quantitates binomiae, trinomiae, vel polynomiae) genannt werden (§. 45. II. Zus.), so geschieht die Multiplication und Division nach folgender Regel:

1) Man verfahre bey der Multiplication der Wurzelgrößen ganz nach §. 58., und bey der Division derselben nach Vorschrift des §. 59., während man

2) die einzelnen Producte und Quotienten nach §. 84. bestimmt.

I. Beyspiel der Multiplication:

Es soll die zusammengesetzte oder complexe Wur-

zelgröße $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ mit $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ multiplicirt werden.

Auflösung:

Multiplicand	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$
Multiplicator	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$
Partialproducte	$\begin{cases} \sqrt{a^2} + \sqrt{ab} \\ \quad\quad - \sqrt{ab} - \sqrt{b^2} \end{cases}$
Totalproduct	$\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = a - b.$

Es ist also $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = a - b.$

II. Beyspiel der Multiplication:

Es soll $\frac{2}{3}\sqrt{a^m} - \frac{4}{5}\sqrt[3]{b^n}$ mit $\frac{2}{3}\sqrt{a^m} - \frac{4}{5}\sqrt[3]{b^n}$ multiplicirt werden.

Auflösung:

Multiplicand	$\frac{2}{3}\sqrt{a^m} - \frac{4}{5}\sqrt[3]{b^n}$
Multiplicator	$\frac{2}{3}\sqrt{a^m} - \frac{4}{5}\sqrt[3]{b^n}$
Partialproducte	$\begin{cases} \frac{4}{9}\sqrt{a^{2m}} - \frac{8}{15}\sqrt[6]{a^{3m}b^{2n}} \\ \quad\quad - \frac{8}{15}\sqrt[6]{a^{3m}b^{2n}} + \frac{16}{25}\sqrt[3]{b^{2n}} \end{cases}$
Totalproduct	$\frac{4}{9}\sqrt{a^{2m}} - \frac{16}{15}\sqrt[6]{a^{3m}b^{2n}} + \frac{16}{25}\sqrt[3]{b^{2n}}$

Daher ist $\left(\frac{2}{3}\sqrt{a^m} - \frac{4}{5}\sqrt[3]{b^n}\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{a^m} - \frac{4}{5}\sqrt[3]{b^n}\right) = \frac{4}{9}\sqrt{a^{2m}} - \frac{16}{25}\sqrt[6]{a^{3m}b^{2n}} + \frac{16}{25}\sqrt[3]{b^{2n}}.$

III. Beyspiel der Multiplication:

Es soll $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ mit $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ multiplicirt werden.

Auflösung:

Multiplicand	$\sqrt{3} + \sqrt{2}$
Multiplicator	$\sqrt{3} - \sqrt{2}$
Partialproducte	$\sqrt{9} + \sqrt{6}$
	$\quad - \sqrt{6} - \sqrt{4}$
Totalproduct	$\sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$

Also ist $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$

Anmerkung: Wenn was immer für eine zusammengesetzte Größe, es mögen die Factoren keine Exponenten haben (§. 58.), oder sie mögen Brüche, oder endlich Potenzen oder Wurzelgrößen seyn, mit sich selbst zu multipliciren ist, oder wenn man überhaupt bemerkt, daß in den zur Multiplication gegebenen Factoren der Ordnung nach mehrere gleichartige Glieder vorkommen, so bekömmt man auch im Partialproducte solche Glieder, die dann wirklich bey der vorzunehmenden Addition in eine Summe gebracht werden können; um deswillen mag man in solchen Fällen, um sich die Addition zu erleichtern, jedes Partialproduct, wie ich dieses bisher bey Auflösung einiger Beyspiele that, um eine Stelle zur Linken rücken, damit dadurch in den Producten die gleichartigen Glieder unter einander zu stehen kommen.

I. Beyspiel der Division:

Es soll $a - b$ durch $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ dividirt werden.

Auflösung:

Weil a und $-b$ keine Wurzelgrößen, dagegen aber $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ solche Größen sind, so mache man nach §. 81. b. erstere zu solchen Wurzelgrößen, wo ebenfalls die Quadratwurzel ausgezogen werden soll, man erhält $\sqrt{a^2}$ und $\sqrt{b^2}$, indem $a = \sqrt{a^2}$, und $-b = -\sqrt{b^2}$;

Dividend $\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$ $\Big\{$ $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ Quotient
Divisor $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$
$\sqrt{a^2} + \sqrt{ab}$
$- \qquad -$

Rest $- \sqrt{ab} - \sqrt{b^2}$ oder $- \sqrt{b^2} - \sqrt{ab}$
$: (\sqrt{a} + \sqrt{b})$ $\qquad : (\sqrt{b} + \sqrt{a}$
$- \sqrt{ab} - \sqrt{b^2}$ $\qquad - \sqrt{b^2} - \sqrt{ab}$
$+ \qquad + \qquad + \qquad +$

Es ist also $(a - b) : (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

II. Beyspiel der Division:

Es soll $48 - \sqrt{1280} - \sqrt{1620} + 30$ durch $8 - \sqrt{45}$ dividirt werden.

Auflösung:

Dividend $\qquad$ Quotient
$48 - \sqrt{1280} - \sqrt{1620} + 30$ $\Big\{$ $6 - \sqrt{20}$
$(8 - \sqrt{45})$ ist der Divisor
$48 - \sqrt{1620}$
$- +$

$- \sqrt{1280} + 30$
$: (8 - \sqrt{45})$
$- \sqrt{1280} + 30$
$+ \qquad -$

Es ist also $(48 - \sqrt{1280} - \sqrt{1620} + 30) : (8 - \sqrt{45}) = 6 - \sqrt{20}$.

Anmerkung: 1) Bey Auflösung dieses Beyspieles, wo ganze Zahlen mit Wurzelgrößen multiplicirt und dividirt werden mußten, sind erstere nach Vorschrift des §. 81. b. zu Wurzelgrößen gemacht worden; weßhalb $\sqrt{36}$ anstatt 6, dann $\sqrt{64}$ anstatt 8, und 30 anstatt $\sqrt{45} \times \sqrt{20} = \sqrt{900}$ gesetzt wurde.

2) Weil die Wurzelgrößen z. B. $\sqrt{3}$, $2\sqrt[3]{4}$, $\frac{1}{2}\sqrt{16}$ rc. mehrentheils Irrationalzahlen, d. h., solche Zahlen sind, bey welchen die Wurzel nie genau ausgezogen werden kann, so werden die Rechnungsarten mit Wurzelgrößen gewöhnlich auch die Rechnungsarten mit

Irrationalzahlen genannt, worüber demnach in diesem Abschnitte die gehörigen Regeln sammt einigen Beyspielen angeführt worden sind.

3) Die in Betreff der Zeichen in den §§. 56. und 57. für die Multiplication und Division aufgestellte Regel, daß nämlich gleiche Zeichen (+) und ungleiche (—) geben, wird auch auf diese Weise ausgedrückt: „Signa eadem dant plus, signa diversa minus.“

VI. Abschnitt.

Von der Auflösung der Producte in ihre Factoren.

§. 86.

Erklärung.

Unter der Auflösung der Producte in ihre Factoren versteht man hier jene Veränderung, wodurch eine Größe so als Product dargestellt wird, daß auch die Factoren sichtbar werden, aus welchen sie entstanden ist; z. B. wenn ich sage „$12 = 4 \times 3$“, so habe ich die Zahl 12 in die beiden Factoren 4 und 3 aufgelöst, welche mit einander multiplicirt zum Producte die Zahl 12 wieder geben.

Durch diese Veränderung werden die Producte zerfällt, d. i., auf ihre ursprünglichen Factoren zurückgeführt, weßhalb dieselbe auch von einigen das Zerfällen oder Zerlegen der Größen in Factoren genannt wird.

Anmerkung: In Gemäßheit der mir von meinem gelehrten Freunde dem diesortigen königlich baierischen Herrn Medizinalrathe Doctor Herberger gemachten Bemerkung können diejenigen Zahlen, die als Producte in ihre Factoren aufgelöst werden, passend wirkliche Producte, hingegen aber die Factoren, die mit einander zu multipliciren sind, um die vorigen Zahlen wieder zu geben, arbiträre Producte genannt werden; indem

bey den wirklichen Producten der eine Factor wirklich so und so oft gesetzt worden ist, als es der andere anzeigt, und bey arbiträren Producten durch die Multiplicationszeichen nur ausgedrückt wird, daß die Multiplication vorzunehmen sey.

§. 87.

Einige Regeln in Absicht auf die Auflösung der Producte in ihre Factoren.

Das Zerfällen der Producte in die Factoren ist von größter Wichtigkeit, indem ohne dasselbe in der Mathematik viele Beweise nicht gegeben, und mehrere Auflösungen gegebener Aufgaben nicht ausgeführt werden könnten; um deswillen führe ich nun hierüber einige Regeln für einige Fälle an, indem sich für alle möglichen Fälle keine allgemein giltigen Vorschriften angeben lassen, und dabey das Meiste auf Uebung und eigene Erfindung ankömmt.

I. Findet man mittels der im II. Theile §. 11. aufgestellten Regeln, daß eine ganze Zahl durch 2,, 3,, 4,, 6,, 8,, oder 9 ohne Rest theilbar ist, so läßt sich die gegebene Zahl allemal in 2 Factoren auflösen, wovon der eine Factor das Maaß, und der andere Factor der bey der Division zum Vorscheine kommende Quotient ist; z. B. $468 : 2 = 234$, daher ist $468 = 2 \times 234 = 234 \times 2$ (I. §. 49.), eben so ist $2592 : 8 = 324$, weßhalb $2592 = 8 \times 324 = 324 \times 8$.

II. Weil jede Größe durch 1 und durch sich selbst theilbar ist, so läßt sich jede Größe in 2 Factoren auflösen, wovon der eine Factor 1 und der andere die unveränderte Größe ist; z. B. $a : a = 1$, und $a : 1 = a$, daher ist $a = a \times 1 = 1 \times a$; eben so ist $13 : 13 = 1$, und $13 : 1 = 13$, daher ist $13 = 13 \times 1 = 1 \times 13$.

III. Weil in der Buchstabenrechnung in den Producten die Factoren von verschiedenen Buchstaben ohne ein dazwischen gesetztes Zeichen zusammengesetzt werden (§. 54. Nro. 2.), so sieht man bey einfachen Größen jene Factoren gleich unmittelbar vor sich, in welche das Product zerfällt werden kann; z. B. $ab = a \times b = b \times a$, $m^2x^2 = m^2 \times x^2 = x^2 \times m^2$, und $\frac{am}{bn} = \frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{m}{n} \times \frac{a}{b}$ (§. 67. III. Lehrs.).

IV. Kömmt bey einer zusammengesetzten Größe in allen Gliedern die nämliche Größe als Factor vor, so läßt sich dieselbe allezeit in zwey Factoren auflösen, wovon der eine diese Größe, und der andere jener Quotient ist, den man erhält, wenn man die zusammengesetzte Größe mit der in allen Gliedern als Factor vorkommenden Größe dividirt; z. B. bey der zusammengesetzten Größe $ax + bx - cx + x$ kömmt x in allen Gliedern als Factor vor, daher ist $(ax + bx - cx + x) : x = a + b - c + 1$ (§. 53. I. Lehrs.), und $ax + bx - cx + x = (a + b - c + 1) x$; eben so ist $(ax - x^2) : x = a - x$, und daher $ax - x^2 = (a - x) x$.

V. Wenn zum voraus bekannt ist, daß irgend eine Größe das Quadrat oder der Kubus einer anderen Größe ist, so läßt sich den im §. 25. bey e und f aufgestellten Begriffen gemäß das Zerfällen der Producte in Factoren dadurch vornehmen, daß man die Quadrat- oder Kubikwurzel auszieht, und dann diese letztere zwey- oder dreymal als

Factor setzt; z. B. $\sqrt[2]{a^2} = a$, und $\sqrt[3]{a^m} = a^{\frac{m}{3}}$, daher ist $a^2 = a \times a$, und $a^m = a^{\frac{m}{3}} \times a^{\frac{m}{3}} \times a^{\frac{m}{3}} = a^{\frac{2m}{3}} \times a^{\frac{m}{3}}$.

Eben so ist $\sqrt{119716} = 346$ (§. 29. I. Beysp.), und $\sqrt[3]{157464} = 54$, (§. 36. I. Beysp.), weßhalb $119716 = 346 \times 346$, und $157464 = 54 \times 54 \times 54 = 2916 \times 54$.

VI. Die Summe zweyer Größen mit ihrer Differenz multiplicirt giebt allezeit zum Producte die Differenz ihrer Quadrate (§. 80. II. Beysp. der Multipl.); daher läßt sich die Differenz zweyer Quadrate allezeit so in Factoren auflösen, daß der eine Factor die Summe, und der andere die Differenz der Wurzeln derselben ist; z. B. $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$, $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$, $1 - a^2 = (1 + a)(1 - a)$, $(64 - 49) = (8 + 7)(8 - 7)$ (§. 58. IV. Beysp.).

VII. Abschnitt.

Von den Progressionen.

§. 88.

Erklärungen.

a) Eine Menge von Größen, derer jede nach einem allgemeinen Gesetze bestimmt ist, wird ein Reihe

(Series) oder eine Progression (Progressio von progredior — fortgehen) genannt; z. B. die Zahlen „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bilden eine Reihe oder Progression, indem jede folgende Zahl um 1 größer ist, als die unmittelbar vorhergehende, und somit dieselben nach einem allgemeinen Gesetze bestimmt sind.

b) Die einzelnen Größen der Reihe werden ihre Glieder (Termini), und der Ausdruck, durch den jedes Glied dargestellt ist, wird das allgemeine Glied (Terminus generalis) genannt; z. B. in der Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ sind die einzelnen Größen $+1$ „ $+x$ „ $+x^2$ ꝛc. die Glieder, und $+x^{n-1}$ ist das allgemeine Glied, weil jedes Glied, da auch $1 = x^0$ (§. 77. II. Zus.), eine Potenz von x ist, deren Exponent die Anzahl der vorausgehenden Glieder anzeigt; ist demnach z. B. $n = 5$, so ist $x^{n-1} = x^{5-1} = x^4$, und somit x^4 das 5te Glied, ist aber $n = 3$, so ist $x^{n-1} = x^{3-1} = x^2$, und somit x^2 das dritte Glied dieser Progression.

c) Die Progression heißt steigend oder divergirend (Progressio crescens), wenn die Glieder immer zunehmen, hingegen nennt man sie aber fallend oder convergirend (Progressio decrescens), wenn ihre Glieder immer abnehmen.

Das vorhin bey a angeführte Beyspiel ist eine steigende Reihe, im Gegentheile aber ist diese Progression fallend „$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ . . ., weil hier die Glieder von der Linken zur Rechten immer abnehmen (II. §. 5. Zus. II. b.).

d) Eine Menge von Zahlen, die in gleichen stättigen arithmetischen Verhältnissen fortgehen (II. §. 47. a. §. 49. b. und §. 52. d.), wo also zwischen einem Gliede und seinem darauf folgenden immer die nämliche Differenz ist, heißt eine arithmetische Progression (Progressio arithmetica); z. B.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 . . . . oder
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 . . . .;

bey diesen beiden arithmetischen Progressionen, welche die in der natürlichen Ordnung fortlaufenden geraden

und ungeraden Zahlen (§. 65.) darstellen, ist die gemeinschaftliche Differenz = 2.

e) Sind die Verhältnisse solcher Zahlen geometrisch, so bilden dieselben eine geometrische Reihe oder Progression, wo also alle Verhältnisse den nämlichen Exponenten haben (II. §. 47. b. §. 50. b. e. und §. 52. d.); z. B.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 .... oder

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ ...

wo im ersten Beyspiele die Zahl 2 und im zweyten die Zahl $\frac{1}{2}$ der gemeinschaftliche Exponent ist.

I. Zusatz: Weil die arithmetische Reihe aus gleichen stättigen arithmetischen Verhältnissen besteht, so läßt sich dieselbe allezeit in stättige arithmetische Proportionen (II. §. 52. d.) auflösen; z. B., man habe die arithmetische Progression „2, 4, 6, 8, 10, 12", so bekömmt man daraus nachstehende 4stättige arithmetische Proportionen:

a) $2 - 4 = 4 - 6$, oder $2 - 4 - 6$
b) $4 - 6 = 6 - 8$ $\qquad 4 - 6 - 8$
c) $6 - 8 = 8 - 10$ $\qquad 6 - 8 - 10$
d) $8 - 10 = 10 - 12$ $\qquad 8 - 10 - 12$.

II. Zusatz: Eben so kann auch z. B. die geometrische Progression „1, 2, 4, 8, 16, 32 in folgende 4 stättige geometrische Proportionen aufgelöst werden:

a) $1 : 2 = 2 : 4$, oder $1 : 2 : 4$
b) $2 : 4 = 4 : 8$ $\qquad 2 : 4 : 8$
c) $4 : 8 = 8 : 16$ $\qquad 4 : 8 : 16$
d) $8 : 16 = 16 : 32$ $\qquad 8 : 16 : 32$

§. 89.

Aufgabe, einen Bruch durch fortgesetzte Division aufzulösen, und dadurch eine Reihe zu entwickeln.

Auflösung:

Wenn bey einem Bruche, er mag in Zahlziffern oder Buchstaben ausgedrückt seyn, der Zähler durch den Nenner, im Falle dieser letztere eine mehrtheilige Größe ist, durch die Glieder des Nenners nicht theil-

bar ist, so wird, wenn man die Division vornimmt, dadurch der Bruch nach folgenden Regeln in eine Progression aufgelöst:

1) Man nehme den Zähler zum Dividend und den Nenner zum Divisor, und dividire wirklich, indem man die einzelnen Quotienten und Producte nach den für die vorkommenden Größen aufgestellten Regeln bestimmt.

2) Man suche nur einige Glieder des Quotienten, um aus diesen das allgemeine Gesetz zu bestimmen, nach welchem dann die Reihe beliebig fortgesetzt werden kann.

3) Weil bey einer jeden Division (§. 53. VII. Lehrs.) der Dividend $D = dq + r$, so ist auch, weil Gleiches mit Gleichem dividirt Gleiches giebt (I. §. 62. I.), $D : d = q + r : d$, oder $\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}$ (§. 53. VII. Lehrs. II. Zus.); um deswillen setze man den letzten Rest, welcher vorhanden ist, sobald man die Division abbricht, wie er durch den nämlichen Divisor dividirt werden soll, den gefundenen Gliedern des Quotienten mittels des Additionszeichens bey.

I. Beyspiel:

Es soll der Bruch $\frac{1}{2+1}$ in eine Progression aufgelöst werden.

Auflösung:

Dividend 1 — Quotient $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \ldots\ldots$

Divisor $(2+1)$

$1 + \frac{1}{2}$

$- \quad -$

Rest $-\frac{1}{2}$

$: (2+1)$

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$+ \quad +$

Rest $+\frac{1}{4}$

$: (2+1)$

$+\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

$- \quad -$

Rest $-\frac{1}{8}$

$: (2+1)$

$-\frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

$+ \quad +$

Rest $+\frac{1}{16}$

$: (2+1)$

$\frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

$- \quad -$

der letzte Rest $-\frac{1}{32}$.

Es ist also $\frac{1}{2+1} = 1 : (2+1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + (-\frac{1}{32} : (2+1))$.

Die Theile dieses Quotienten bilden der Ordnung nach eine abnehmende **Reihe**, wo die Zeichen regelmäßig abwechseln, indem das 1te, 3te, 5te, somit immerhin das $(2m+1)$te Glied (§. 65.) das Zeichen $(+)$, und das 2te, 4te, somit das $2m$te Glied (§. 65.) das Zeichen $(-)$ hat; zugleich sind alle Glieder der Ordnung nach Potenzen des ersten Gliedes, indem $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$, $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$ rc.; um deswillen ist $\pm (\frac{1}{2})^n$ das allgemeine Glied; nach dieser

Formel ist z. B. das 6te Glied $= - (1/2)^6 = - 1/64$, das 7te Glied $= + (1/2)^7 = + 1/128$, das 8te Glied $= - (1/2)^8 = - 1/256$ ꝛc.

II. Beyspiel:

Es soll der Bruch $\frac{a}{b-c}$ in eine Reihe aufgelöst werden.

Auflösung:

Quotient

$$\begin{array}{ll} \text{Dividend } a & \\ \text{Divisor } (b-c) & \left\{ \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \ldots \right. \end{array}$$

$$a - \frac{ac}{b}$$

$$- \quad +$$

$$\text{Rest} \quad + \frac{ac}{b}$$

$$: (b-c)$$

$$+ \frac{ac}{b} - \frac{ac^2}{b^2}$$

$$- \quad +$$

$$\text{Rest} \quad \frac{ac^2}{b^2}$$

$$: (b-c)$$

$$\frac{ac^2}{b^2} - \frac{ac^3}{b^3}$$

$$- \quad +$$

$$\text{der letzte Rest} \quad \frac{ac^3}{b^3}$$

Daher ist $\frac{a}{b-c} = a : (b-c) = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^3} : (b-c)$.

Der

Der hier gefundene Quotient ist ebenfalls eine Progression, wo der Zähler eines jeden Gliedes, indem $c^0 = 1$ (§. 77. Zus. II.) und also $a = ac^0$, ein Product aus der unveränderten Größe a und aus einer Würde von c ist, deren Exponent die Anzahl der vorausgehenden Glieder anzeigt; weil überdieß der Nenner eines jeden Gliedes allezeit die Würde von b mit einem Exponenten ist, der um 1 größer ist, als der im Zähler bey der Potenz vorkommende Exponent, und zugleich alle Glieder das Zeichen (+) haben, so ist $+ \frac{a \times c^{n-1}}{b^n} = \frac{ac^{n-1}}{b^n}$ das allgemeine Glied, und deßhalb z. B. das 4te Glied $= \frac{ac^{4-1}}{b^4} = \frac{ac^3}{b^4}$, das 5te Glied $= \frac{ac^{5-1}}{b^5} = \frac{ac^4}{b^5}$, das 6te Glied $= \frac{ac^{6-1}}{b^6} = \frac{ac^5}{b^6}$ ꝛc.

Auf die nämliche Weise erhält man Progressionen, wenn man die Brüche $\frac{a}{b+c}$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-1}$, $\frac{1}{2-1}$ ꝛc. durch Division auflöst, oder

I. $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^4} : (b+c)$;

II. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \frac{x^5}{1-x}$;

III. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \left(\frac{-x^5}{1+x}\right)$;

IV. $\frac{y^8}{x^2 - y^2} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^6}{x^6} + \frac{y^8}{x^6}$: $(x^2 - y^2)$;

V. $\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{1-1}$;

VI. $\frac{1}{4-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ $+ \frac{1}{256} : (4 - 1)$.

§. 90.

Einige Aufgaben in Absicht auf die arithmetischen und geometrischen Progressionen.

a) Wenn man bey einer arithmetischen Progression das erste Glied mit a, das letzte mit u, die gemeinschaftliche Differenz mit d, die Anzahl aller Glieder mit n, und die Summe der ganzen Progression mit S bezeichnet, so ist

I. $u = a + dn - d = a + d\,(n - 1)$, d. h., man erhält bey einer arithmetischen Progression das letzte Glied, wenn man zum ersten Gliede jenes Product addirt, das man erhält, wenn man die gemeinschaftliche Differenz mit der um 1 verminderten Anzahl der Glieder multiplicirt.

II. $d = \frac{u - a}{n - 1}$, d. i., die gemeinschaftliche Differenz ist gleich dem Quotienten, den man erhält, wenn man die Differenz des letzten und ersten Gliedes durch die um 1 verminderte Anzahl der Glieder dividirt.

III. $S = (a + u)\frac{n}{2}$, d. i., die Summe der ganzen arithmetischen Progression ist gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes multiplicirt durch die halbe Anzahl der Glieder.

b) Drückt man bey der geometrischen Progression das erste Glied mit a, das letzte mit u, die Anzahl aller

Glieder mit n, den gemeinschaftlichen Exponenten mit m, und die Summe aller Glieder mit S aus, so ist

I. $u = a \times m^{n-1} = am^{n-1}$, d. i., um das letzte Glied zu erhalten, erhebt man den Exponenten der Reihe zur Würde mit einem Exponenten, welcher die um 1 verminderte Anzahl aller Glieder ist, und multiplicirt dann dieselbe mit dem ersten Gliede.

II. $S = \frac{mu - a}{m - 1}$, d. i., bey einer zunehmenden geometrischen Progression ist die Summe aller Glieder gleich dem Producte des Exponenten und des letzten Gliedes davon das erste Glied abgezogen, und dividirt durch den um 1 verminderten Exponenten.

§. 91.

Beyspiele in Absicht auf die arithmetischen und geometrischen Progressionen.

I.

Wie groß ist die 12te ungerade Zahl?

Auflösung:

1) Die ungeraden in der natürlichen Ordnung fortlaufenden Zahlen bilden von 1 angefangen eine arithmetische Progression, wo das erste Glied oder $a = 1$, die gemeinschaftliche Differenz oder $d = 2$, und in diesem Beyspiele die Anzahl aller Glieder oder $n = 12$.

2) Es ist also in Gemäßheit der bey a. I. aufgestellten Formel $u = a - d\,(n - 1) = 1 + 2\,(12 - 1) = 1 + 24 - 2 = 25 - 2 = 23$; weßhalb 23 die gesuchte 12te ungerade Zahl ist, wie man aus nachstehender Progression ersieht:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23.

II.

Eine Kirchenorgel hat in einer aufsteigenden arithmetischen Reihe 24 Pfeifen. Die kleinste mißt 17 und die größte 132 Zoll; um wieviel ist eine größer als die andere?

Auflösung:

1) Man hat hier eine arithmetische Progression, wo das erste Glied oder $a = 17$, das letzte Glied oder $u = 132$, und die Anzahl aller Glieder oder $n = 24$.

2) Es ist also $d = \frac{u - a}{n - 1} = \frac{132 - 17}{24 - 1} = {}^{115}/_{23} = 5$, d. h., um 5 Zoll ist jede folgende Pfeife größer als die unmittelbar vorhergehende.

III.

Wenn jemand den ersten Tag 1 kr., den zweyten 2, den dritten 3 kr., und überhaupt jeden folgenden Tag um 1 kr. mehr als den unmittelbar vorhergehenden Tag bekommen würde, welche Summe würde dieses in einem Jahre, d. i., in 365 Tagen ausmachen?

Auflösung:

1) Man hat hier eine arithmetische Reihe, wo das erste Glied oder $a = 1$, das letzte Glied oder $u = 365$, und die Anzahl aller Glieder oder $n = 365$.

2) Es ist also $S = (a + u)\frac{n}{2} = (1 + 365)\frac{365}{2} = \frac{366 \times 365}{2} = 183 \times 365 = 66795$ kr. $=$ 1113 fl. 15 kr., d. h., diese Summe bekömmt man dann in einem Jahre.

IV.

Welche Snmme erhält man, wenn man von 1 angefangen alle in der natürlichen Ordnung bis auf 1'000.000 fortlaufenden Zahlen addirt?

Auflösung:

1) In unserm Decimalsysteme bilden die in der natürlichen Ordnung fortlaufenden Zahlen eine arithmetische Reihe, wo das erste Glied oder $a = 1$, die gemeinschaftliche Differenz oder $d = 1$, und in diesem Beyspiele die Anzahl aller Glieder oder $n =$ 1'000.000.

2) Es ist also $S = (a + u) \frac{n}{2} =$

$(1 + 1000000) \frac{1000000}{2} = 1000001 \times 500000 =$ 500 000'500.000, d. i., so groß ist die Summe der erwähnten Zahlen.

V.

Ein Stein fällt von der Spitze eines Thurmes in 5 Secunden herab, wie hoch ist der Thurm?

Auflösung:

1) Aus der Erfahrung weiß man, daß ein Körper im freyen Falle in der ersten Secunde beynahe 15 Pariser Fuß, in der zweyten 45 rc. zurücklege, mithin seine während einer bestimmten Anzahl von Secunden durchlaufenden Räume eine arithmetische Reihe bilden, wo das erste Glied oder $a = 15$, die gemeinschaftliche Differenz oder $d = 30$, und hier die Anzahl der Glieder oder $n = 5$ ist.

2) Man bestimme zuerst, wieweit der Stein während der letzten Secunde fällt; es ist $u = a + d(n - 1) = 15 + 30(5 - 1) = 15 + 30 \times 4 = 15 + 120 = 135$.

3) Nun suche man die Summe aller Glieder dieser Reihe; es ist $S = (a + u)\frac{n}{2} = (15 + 135)\frac{5}{2}$

$= \frac{150 \times 5}{2} = 75 \times 5 = 375$, d. h., der Thurm ist 375 Pariser Fuß hoch.

VI.

Ein Gläubiger macht mit seinem Schuldner den Vertrag, daß dieser im ersten Jahre nur 2 fl., in jedem nächsten aber dreymal so viel, als im vorhergehenden, bezahlen solle. Nach Verlauf von 8 Jahren war die ganze Schuld getilgt; wie groß ist dieselbe gewesen?

Auflösung:

1) Weil man hier eine geometrische Reihe hat, wo das erste Glied oder $a = 2$, der gemeinschaftliche Exponent oder $m = 3$, und die Anzahl aller Glieder der $n = 8$ ist, so suche man allererst das letzte Glied; es ist $u = am^{n-1} = 2 \times 3^{8-1} = 2 \times 3^7 = 2 \times 2187 = 4374$, weil $3^7 = 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 2187$.

2) Nun suche man die Summe aller Glieder, es ist $S = \frac{mu - a}{m - 1} = \frac{3 \times 4374 - 2}{3 - 1} = {}^{13120}/_2 =$ 6560, d. h., die ganze Schuld hat 6560 fl. betragen.

VII.

Wenn man ein Körnchen Waizen aussäet, dieses 10 Körnchen, und jedes von diesen ausgesäet wieder 10 Körnchen bringt ꝛc., wie viele Körnchen giebt dieses im zwölften Jahre?

Auflösung:

1) Man hat hier eine geometrische Progression, wo das erste Glied oder $a = 1$, der Exponent oder $m = 10$, und die Anzahl aller Glieder oder $n = 12$ ist.

2) Es ist daher $u = am^{n-1} = 1 \times 10^{12-1} = 1 \times 10^{11} = 100.000'000.000$, d. i., so viele Körnchen bekömmt man im zwölften Jahre, indem $10^{11} = 100.000'000.000$ (§. 69. V. Zus.).

VIII.

Wenn man am ersten Tage 1 Häller, am zweyten 2, am dritten 4, am vierten 8 Häller bezahlen, und man diese Zahlung 30 Tage hindurch nach dem Gesetze fortsetzen würde, daß man an jedem folgenden Tage doppelt so viel, als an dem unmittelbar vorhergehenden bezahlen würde, welche Summe würde dadurch in diesen 30 Tagen erlegt werden?

Auflösung:

1) Man suche, weil man hier eine geometrische

Progression hat, wo a = 1, m = 2, und n = 30, allererst das letzte Glied; es ist $u = am^{n-1} = 1 \times 2^{30-1} = 2^{29}$.

Um sich das Potenziren zu erleichtern, verfahre man auf folgende Weise:

$$m = 2,$$
$$m \times m = m^2 = 2 \times 2 = 4,$$
$$m^2 \times m^2 = m^4 = 4 \times 4 = 16,$$
$$m^4 \times m^4 = m^8 = 16 \times 16 = 256,$$
$$m^8 \times m^8 = m^{16} = 256 \times 256 = 65536,$$
$$m^{16} \times m^8 = m^{24} = 65536 \times 256 = 16777216,$$
$$m^{24} \times m^4 \times m = m^{29} = 16777216 \times 16 \times 2$$
$$= 16777216 \times 32 = 536'838.912.$$

Es ist also u = 536'838.912.

2) Daher ist jetzt $S = \frac{um - a}{m - 1} = \frac{536870912 \times 2 - 1}{2 - 1}$

$= \frac{1073741824 - 1}{2 - 1} = 1073741823$, d. h., in 30 Tagen beläuft sich diese Summe auf 1073741823 Häller = 134217727 kr. 7 Häller = 2'236.962 fl. 7 kr. 7 Häller.

Anmerkung: 1) Durch die so eben angeführten Auflösungen der gegebenen Aufgaben wollte ich dem Lehrer einige Winke geben, wie die bey den arithmetischen und geometrischen Progressionen aufgestellten Formeln zur Auflösung mancher interessanten Aufgaben benützt werden können; die übrigen Aufgaben, welche bey diesen Progressionen möglich sind, können hier, da sie die ausführliche Lehre von den arithmetischen und geometrischen Progressionen, wie auch die Auflösung der Gleichungen, und die Rechnung mit Logarithmen voraussetzen, nicht vorgetragen werden.

2) Wenn die Reihe aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern besteht, so ist sie endlich (Series finita); lassen sich hingegen nie alle Glieder darstellen, so ist sie unendlich (Series infinita); die in diesem § vorkommenden Reihen sind daher endlich, dagegen aber die im §. 89. entwickelten Progressionen sind unendlich.

VIII. Abschnitt.

Von der Auflösung einiger einfachen Gleichungen.

I. Einleitung.

§. 92.

Erklärungen.

a) Zwey Ausdrücke, wovon einer dem anderen gleich ist, indem sie die nämliche Größe bezeichnen, nennt man eine Gleichung (Aequatio); z. B. $3 + 5 = 8$ oder $a + b = x$ (II. §. 56. a.).

b) Die beiden Ausdrücke der nämlichen Größe heißt man die Seiten (Membra) und die durch die Zeichen (+) oder (—) mit einander verbundenen Größen die Glieder der Gleichung (Termini äquationis), gleichwie das Zeichen, welches die Gleichheit der Ausdrücke anzeigt, das Gleichheitszeichen (Signum äqualitalis) genannt wird (I. §. 9. Nro. 2.); so machen z. B. in den vorhergehenden Gleichungen $3 + 5$ und $a + b$ die erste, und 8 wie auch x die zweyte Seite der Gleichung aus, wovon in diesen beiden Beyspielen erstere Seite zwey, und die andere Seite nur ein Glied enthält.

c) In Absicht auf die Gleichungen wird die Algebra (I. §. 7.) jener Theil der Mathematik genannt, welcher den Werth der unbekannten Größen aus gegebenen Bedingungen mittels der Gleichungen abzuleiten lehret.

§. 93.

Die Behandlungsart einer jeden Gleichung.

Bey Auflösung gewißer Aufgaben durch Hilfe der Gleichungen besteht die ganze Behandlungsart in zwey

Stücken, nämlich in der Bildung der Gleichungen, und in der Ausarbeitung derselben.

a) Die Bildung — Formation der Gleichungen besteht darin, daß man aus den gegebenen Bedingungen gleiche Ausdrücke sucht, und sich die Gleichungen bildet, indem man dadurch, daß man die vorkommenden Größen mit Ziffern und Buchstaben bezeichnet, die Aufgabe aus der bürgerlichen Sprache in die algebraische übersetzt.

Daß dabey die bekannten Größen mit den ersten, und die unbekannten mit den letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet werden, ist schon im §. 43. d. bemerkt worden.

b) Die Ausarbeitung — Solution der Gleichung besteht sowohl in jenen Veränderungen, wodurch der Gleichung eine einfachere und schicklichere Gestalt gegeben wird, als auch darin, daß man die Gleichung so behandelt, daß man den Werth der unbekannten Größe findet, welche letztere dadurch gefunden wird, daß man sie ganz allein mit dem Zeichen (+) auf die eine Seite bringt, während dann auf der anderen Seite die bekannten Größen stehen.

Zusatz: Für die Bildung der Gleichungen lassen sich keine allgemein giltigen Vorschriften geben, indem dieselbe auf der Kenntniß derjenigen Dinge, welche in den Aufgaben vorkommen, wie auch auf Uebung, und gesunder Urtheilskraft beruht; um deswillen können nur Regeln in Betreff der Ausarbeitung schon gegebener Gleichungen aufgestellt werden.

§. 94.

Die Eintheilung und Benennung der verschiedenen Gleichungen.

In einer Gleichung ist die unbekannte Größe die Hauptgröße, von ihr erhält die Gleichung ihre Benennung; man unterscheidet daher

A) in Rücksicht der Anzahl der vorkommenden unbekannten Größen

a) Gleichungen mit einer,
b) mit mehreren unbekannten Größen.

B) in Rücksicht der Beschaffenheit der unbekannten Größen

a) einfache — niedere Gleichungen, oder Gleichungen vom ersten Grade — erster Ordnung, wenn die unbekannte Größe eine einfache Größe ist, und also die erste Potenz nicht übersteigt,

b) zusammengesetzte oder höhere Gleichungen, wenn die unbekannte Größe die erste Dignität übersteigt; in diesem Falle werden dann dieselben quadratische, kubische, biquadratische ꝛc. Gleichungen genannt, je nachdem die höchste Potenz der unbekannten Größe ein Quadrat, Kubus, Biquadrat ꝛc. ist.

Zusatz: Durch eine Gleichung kann nur eine einzige unbekannte Größe bestimmt werden; man nennt daher eine Gleichung mit einer unbekannten Größe eine bestimmte, mit mehreren unbekannten Größen eine unbestimmte Gleichung.

II.

Die Auflösung einfacher Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

§. 95.

Bestimmung, wie bey solchen Gleichungen die bekannten Größen mit der unbekannten verbunden sind.

Bey einfachen Gleichungen mit einer unbekannten Größe, welche gewöhnlich mit x ausgedrückt wird, können die bekannten Größen mit der unbekannten durch eine der vier Rechnungsarten, somit durch Addition, Subtraction, durch Multiplication oder Division in Verbindung stehen.

a) Die Verbindung durch die Addition erkennt man aus dem Additionszeichen (+); z. B. $a + x$, oder $x + b$, hier sind die Größen a und b mit x durch Addition verbunden.

b) Die Verbindung durch Subtraction erkennt man aus dem Subtractionszeichen (—); z. B. $x - a$ oder $- b + x$, hier sind Größen a und b mit x durch Subtraction verbunden.

c) Die Verbindung durch Multiplication erkennt man aus den Multiplicationszeichen (. oder $\times$); und auch daher, daß die Größen ohne ein dazwischen gesetztes Zeichen beysammen stehen; z. B. $a . x$, $b \times x$, cx, hier sind die Größen a, b und c mit x durch Multiplication verbunden.

Bey mehrtheiligen Größen erkennt man die Multiplication auch aus den Einklammerungszeichen ( ); weil man z. B. anstatt $(a + b + c) \times x$ oder $(a + b + c) . x$ der Kürze wegen gewöhnlich schreibt „$(a + b + c)\, x$", so zeigt der letztere Ausdruck ebenfalls an, es sey x mit der Summe $(a + b + c)$ durch Multiplication verbunden.

d) Endlich die Verbindung durch Division erkennt man durch das Divisionszeichen, welches in zwey Puncten (:) besteht, oder auch durch jenes, wo die Größen in der Gestalt eines Bruches beysammen stehen; z. B. $a : x$ oder $x : a$, dann $\frac{b}{x}$ oder $\frac{x}{b}$, wo sowohl a als b mit x durch Division verbunden ist.

§. 96.

Trennung der mit x durch Addition oder Subtraction verbundenen Größen.

Weil die Gleichung dann aufgelöst ist, sobald x auf einer Seite steht, und auf der anderen Seite nur bekannte Größen vorkommen, d. h., wenn die unbekannte Größe x den bekannten gleich ist, so müssen diese letzteren, sie mögen durch was immer für eine Rechnungsart mit x verbunden seyn, davon so ge-

trennt werden, daß die Gleichheit der vorkommenden Ausdrücke nicht aufgehoben wird, und somit die Gleichung immer vorhanden ist.

Bekannte Größen, welche mit x durch Addition oder Subtraction verbunden sind, werden davon auf folgende Weise getrennt:

1) Dort, wo diejenige Größe steht, welche man von x trennen will, lasse man sie ganz weg, und

2) setze sie dagegen auf die andere Seite mit verändertem Zeichen hinüber.

Man habe z. B. die Gleichung $x + 16 = 24$, oder $x + a = b$, so ist $x = 24 - 16 = 8$, und in der zweyten Gleichung ist $x = b - a$.

Eben so, wenn z. B. die Gleichung $x - 12 = 30$ oder $x - a = b$ vorkömmt, ist $x = 30 + 12 = 42$, und $x = b + a$.

A) Grund des Verfahrens in Absicht auf die durch Addition mit x verbundenen Größen.

1) In Gemäßheit der gegebenen Gleichung ist $x + 16 = 24$ oder $x + a = b$.

2) Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt gleiche Reste (I. §. 34. I.), man setze daher die durch Addition mit x verbundene Größe sich selbst gleich, und subtrahire auf beiden Seiten:

$$\begin{array}{rcl} x + 16 & = & 24 \\ 16 & = & 16 \\ - & & - \\ \hline \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rcl} x + a & = & b \\ a & = & a \\ - & & - \\ \hline \end{array}$$

also ist $x = 24 - 16 = 8$, $\qquad x = b - a$

B) Grund des Verfahrens in Absicht auf die mit x durch Subtraction verbundenen Größen.

1) In Gemäßheit der vorkommenden Gleichungen ist

$x - 12 = 30$, oder $x - a = b$.

2) Man addire auf beiden Seiten die mit x durch Subtraction verbundene Größe, man erhält wieder Gleiches:

$$x - 12 = 30 \quad \text{oder} \quad x - a = b$$
$$12 = 12 \quad\quad\quad\quad a = a$$

also ist $x = 30 + 12 = 42$, $\quad x = b + a$

I. Zusatz: Jedes Glied der Gleichung kann nach verändertem Zeichen auf die andere Seite hinübergesetzt, und somit auf diese Weise auf der ersten Seite weggeschafft werden; um deswillen nennt man die Trennung der mit x durch Addition und Subtraction verbundenen bekannten Größen auch das Transponiren (vom latein. Verbum transpono — hinübersetzen).

II. Zusatz; Bey einer Gleichung lassen sich die Zeichen aller Glieder in die entgegengesetzten verwandeln; weil dieses dann eben so viel ist, als wenn man mit veränderten Zeichen alle Glieder von einer Seite anf die andere hinübersetzen würde; z. B. man habe die Gleichung $- x = - a + b$, ändert man hier die Zeichen aller Glieder, so erhält man die Gleichung $x = a - b$.

III. Zusatz: Jede Gleichung läßt sich auf Null bringen, wenn man durch das Transponiren alle Glieder auf eine einzige Seite bringt; z. B. es sey $x = a + b$, so ist, wenn man die Gleichung auf 0 bringt, $x - a - b = 0$.

§. 97.

Trennung der mit x durch Multiplication oder Division verbundenen Größen.

a) Diejenigen bekannten Größen, welche mit x durch Multiplication verbunden sind, werden davon getrennt, wenn man dieselben in jenem Gliede, wo sie als Factoren vorkommen, wegläßt, während man zugleich damit alle übrigen Glieder dividirt, und

b) Größen, welche mit x durch Division verbunden sind, werden davon getrennt, wenn man sie in jenem Gliede, wo sie als Divisoren oder Nenner vorkommen, wegläßt, während man zugleich damit alle übrigen Glieder der Gleichung multiplicirt.

Es ist daher z. B. in der Gleichung $4x = 100 + 48$, oder $ax = b + c$ die Größe $x = {}^{100}/_4 + {}^{48}/_4 = 25 + 12 = 37$, und $x = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b + c}{a}$.

Eben so ist in der Gleichung $\frac{x}{4} = 12 + 5$, oder $\frac{x}{a} = m + n$ die unbekannte Größe $x = 12 \times 4 + 5 \times 4 = 48 + 20 = 68$, und $x = a \times m + n \times a = am + an$.

A) Grund des Verfahrens in Absicht auf die mit x durch Multiplication verbundenen Größen.

1) Den gegebenen Gleichungen gemäß ist
$4x = 100 + 48$, oder $ax = b + c$.

2) Gleiches mit Gleichem dividirt giebt wieder Gleiches, man setze also die mit x durch Multiplication verbundene Größe sich selbst gleich, und dividire beiderseits:

$$\begin{array}{rl} 4x & = 100 + 48, \\ 4 & = 4 \\ \hline \text{also ist } x & = {}^{100}/_4 + {}^{48}/_4 \\ & = 25 + 12 \\ & = 37, \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{rl} ax & = b + c \\ a & = a \\ \hline x & = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ & = \frac{b + c}{a} \end{array}$$

B) Grund des Verfahrens in Absicht auf die mit x durch Division verbundenen Größen.

$$1)\quad \frac{x}{4} = 12 + 5, \text{ oder } \frac{x}{a} = m + n$$
$$2)\quad 4 = 4 \qquad\qquad a = a$$
$$\text{also ist } x = 12 \times 4 + 5 \times 4 \qquad x = a \times m + a \times n$$
$$= 48 + 20 = 68, \qquad = am + an.$$

§. 98.

Aufgabe, jede gegebene einfache Gleichung mit einer unbekanten Größe aufzulösen.

Auflösung:

1) Ist die unbekannte Größe mit einer bekannten Größe durch Division verbunden (§. 95. d.), so trenne man sie davon durch Multiplication (§. 97. b.).

2) Durch das Transponiren (§. 96. I. Zus.) bringe man alle Glieder, welche die unbekannte Größe enthalten, auf eine, und jene Glieder, die aus bekannten Größen bestehen, auf die andere Seite.

3) Man bringe alle Coefficienten der unbekannten Größe, die damit durch Multiplication verbunden sind, in eine Summe, d. i., man löse die auf jener Seite, wo x steht, vorkommende zusammengesetzte Größe in Factoren auf (§. 87. IV.); erhält man jetzt für x einen negativen Werth, so verändere man alle Zeichen (§. 96. II. Zus.), und dividire endlich mit dem mit x durch Multiplication verbundenen Factor, indem man ihn auf der ersten Seite wegläßt, und die zweyte Seite

der Gleichung, somit alle auf der anderen Seite der Gleichung stehenden Glieder damit dividirt.

4) Zur Probe setze man anstatt x den gefundenen Werth, es müssen, im Falle die Rechnung richtig ist, die beiden Seiten der Gleichung wieder einander gleich seyn (I. §. 10. Nro. 10.).

Beyspiel:

Es sey die Gleichung gegeben „$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44$."

Auflösung:

1) Weil $\frac{1}{2}x = \frac{x}{2}$ (I. §. 45. a. und §. 79. Bew. von II.), so ist 2 mit x durch Division verbunden, man trenne also allererst 2 von x durch Multiplication, wodurch dieser Bruch verschwindet, und verfahre dann eben so beym folgenden Bruche $\frac{1}{3}x = \frac{x}{3}$, man erhält dann diese Gleichungen:

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44,$$
$$2x + x + \frac{2}{3}x = 88, \text{ und}$$
$$6x + 3x + 2x = 264;$$

2) Man löse die erste Seite der Gleichung in Factoren auf, oder was bequemer ist, weil man hier wirklich addiren kann, man addire alle Glieder der ersten Seite:

$$6x + 3x + 2x = 264$$
$$(6 + 3 + 2)\, x = 264$$
$$11x = 264$$

3) Weil $(6 + 3 + 2)$, oder kürzer 11 durch Multiplication mit x verbunden ist, so trenne man diesen Factor von x durch Division:

$$11x = 264$$
$$x = {}^{264}\!/_{11} = 24.$$

Probe:

Anstatt x setze man in der anfangs gegebenen Gleichung den gefundenen Werth, somit 24, und es

muß,

muß, im Falle kein Fehler gemacht worden ist, die gegebene Gleichung bleiben:

$$x = 24,\ \tfrac{1}{2}x = 12,\ \tfrac{1}{3}x = 8,$$

also ist $x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x = 24 + 12 + 8 = 44$; weßhalb die vorgenommene Auflösung richtig ist, weil sonst $x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x$ nicht der Zahl 44 gleich seyn könnte.

§. 99.

Einige Beyspiele zur Uebung.

I.

Von einem feindlichen Korps sind nur 1000 Mann gerettet worden, ein Drittel desselben blieb todt auf dem Schlachtfelde, und ein Viertel davon wurde zu Kriegsgefangenen gemacht. Wie stark war das Korps, wie zahlreich die Todten, und wie viele wurden gefangen?

Auflösung:

1) Das ganze Korps sey $= x$, dann ist die Anzahl der Todten $= \tfrac{1}{3}x = \frac{x}{3}$, und die Anzahl der Gefangenen $= \tfrac{1}{4}x = \frac{x}{4}$.

2) Alle Theile zusammen geben das Ganze (I. §. 10. Nro. 2.), daher erhält man diese Gleichung, wo x auf folgende Weise gefunden wird:

$x = \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 1000$, man hebe den ersten Bruch auf,

$3x = x + \frac{3x}{4} + 3000$, eben so den zweyten,

$12x = 4x + 3x + 12000$, man addire wirklich,

$12x = 7x + 12000$, man transponire $7x$,

$12x - 7x = 12000$, man subtrahire wirklich,

$5x = 12000$, man hebe den Factor 5 auf,

$$x = \frac{12000}{5} = 2400.$$

Das Korps war also 2400 Mann stark, die Anzahl der Todten belief sich auf $\frac{1}{3}x = \frac{x}{3} = \frac{2400}{3} = 800$, und die der Gefangenen auf $\frac{1}{4}x = \frac{x}{4} = \frac{2400}{4} = 600$ Mann.

Probe:

Man setze in der Gleichung anstatt der unbekannten Größe x den nun bekannten Werth, und es müssen, im Falle die Rechnung richtig ist, die beiden Ausdrücke wieder einander gleich seyn:

$x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 1000$, und

$$2400 = \frac{2400}{3} + \frac{2400}{4} + 1000$$

$$= 800 + 600 + 1000 = 2400.$$

II.

Ein Bothe macht täglich 4 Meilen, es wird ihm nach 10 Tagen vom nämlichen Orte aus und auf dem nämlichen Wege ein anderer nachgeschickt, der täglich 5 Meilen zurücklegt; wann wird dieser den ersteren einholen?

Auflösung:

1) Man bestimme nach der einfachen Regeldetri, wie viele Meilen der erste Bothe in diesen 10 Tagen schon zurücklegte, und in der gesuchten Zeit x noch zurücklegen wird, wie auch, wie viele Meilen der zweyte in der Zeit x zurücklegt:

M. y	10 T.	M. z	x T.	M. u	x T.
T. 1	4 M.	T. 1	4 M.	T. 1	5 M.

$y = 40$ Meilen, $z = 4x$ M. $u = 5x$ M.

2) Wenn beide in der Voraussetzung, daß sie vom nämlichen Orte ausgegangen sind, den nämlichen Weg zurückgelegt haben, so werden sie beysammen seyn, daher erhält man diese Gleichung, wo dann die x Tage gesucht werden

$40 + 4x = 5x$, man transponire $4x$,

$40 = 5x - 4x = x$, d. h., in 40 Tagen wird der zweyte den ersten einholen.

Probe:

1) Der erste Bothe hat schon zum Voraus 40 Meilen zurückgelegt, und legt in 40 Tagen 160 Meilen zurück, er hat also im Ganzen einen Weg von 200 Meilen zurückgelegt.

2) Der zweyte legt in 40 Tagen 200 Meilen zurück, er hat also auch einen Weg von 200 Meilen gemacht; weßhalb die hier angestellte Berechnung richtig ist.

III.

Eine Person verkauft auf dem Markte

1) die Hälfte ihrer Eyer und noch ein halbes Ey dazu;

2) ferner giebt sie dann wieder die Hälfte der jetzt noch übrigen Eyer 1 und ein halbes hin;

3) endlich verkauft sie abermal die Hälfte der jetzt noch übrigen Eyer sammt einem halben dazu, und es bleibt ihr zuletzt noch ein Ey übrig.

Es ist nun die Frage, wie viele Eyer hat diese Person auf den Markt gebracht, und wieviel hat sie jedesmal verkauft?

Auflösung:

1) Es seyen die auf den Markt gebrachten Eyer $= x$, so wurden das erstemal an Eyern verkauft $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, deßhalb bleibt nun noch übrig $x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$;

2) davon wurde die Hälfte und dazu ein halbes Ey verkauft, somit $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$; es bleibt also, wenn man die schon verkauften subtrahirt, noch übrig $x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$;

3) Davon wurde abermal die Hälfte mit einem halben Ey verkauft, somit $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$;

4) das zuletzt übrig gebliebene Ey mit der Summe aller verkauften Eyer giebt die Summe der auf den Markt gebrachten, d. h.,

1) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
2) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$
3) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
und dann $+ 1$

weßhalb $\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} + 1 = x$;

5) Man hebe den letzten Bruch $\frac{1}{8}$ zuerst auf, weil sein Nenner durch alle übrigen theilbar ist, man erhält:

$$12x - 6x + 12 - 6 + x + 1 + 8 = 8x;$$

6) Man verkleinere, indem man wirklich addirt und subtrahirt, und transponire dann 7x, man erhält:

$$7x + 15 = 8x$$
$$15 = 8x - 7x = x.$$

Es wurden also 15 Eyer auf den Markt gebracht, und das erstemal $\frac{15}{2} + \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 8$ Eyer, das zweymal, da jetzt noch 7 übrig sind, $\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$, und das drittemal, da jetzt noch 3 übrig sind, $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$ Eyer verkauft.

Probe:

1) $\frac{15}{2} + \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 8$, es bleiben noch 7 übrig,
2) $\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$, es bleiben noch 3 übrig,
3) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$, es bleibt noch 1 übrig;

die ganze Summe $= 14 + 1 = 15$.

Anmerkung: Der Lehrer ist durch die Gleichungen in den Stand versetzt, seine Schüler die schönsten und interessantesten Aufgaben, wozu auch die im II. Theile angeführten Beyspiele der Alligations-Regel gehören, auflösen zu lassen. Man findet solche Beyspiele der Menge nach in allen mathematischen Werken, wo die Buchstabenrechnung vorgetragen wird, vorzüglich in jenen des Herrn Professors Brändel.

III. Hauptstück.

Die Sexagesimalbrüche sammt einem Anhange, welcher das Maaß- Gewicht- und Münz-System der alten Römer, Griechen und Hebräer, wie auch die in verschiedenen Ländern üblichen Maaße und Gewichte enthält.

I.

Vorläufige Erklärungen und Aufgaben in Absicht auf die Sexagesimalbrüche.

§. 100.

Erklärungen.

a) Sexagesimalbrüche, sechzigtheilige Brüche oder Sexagesimalen (Fractiones sexagesimales) werden jene Brüche genannt, welche zum Nenner die Zahl 60, oder ein Würde von 60 mit einem ganzen positiven Exponenten haben (II. §. 4. c.); z. B. $\frac{3}{60}$, $\frac{5}{60^2} = \frac{5}{3600}$, $\frac{7}{60^3} = \frac{7}{216000}$ ꝛc.

Diese Brüche haben ihren Nutzen bey Berechnung der Zeit, oder der Grade eines Zirkelbogens, weßhalb sie bey astronomischen und chronologischen Berechnungen mit Vortheil benützt werden können.

Es wird nämlich die Stunde in 60 Minuten, eine

Minute in 60 Secunden, und eine Secunde in 60 Terzen eingetheilt (I. §. 87.); eben so wird auch ein Grad, derer die ganze Kreislinie 360 hat, in 60 Minuten, 1 Minute in 60 Secunden, und die Secunde in 60 Terzen eingetheilet (I. §. 86.).

b) Die Sexagesimalbrüche könnten ganz wie gemeine Brüche geschrieben werden, indessen wäre aber dieses zu mühsam; man hat daher eine kürzere Bezeichnungsweise der Sexagesimalen durch Hilfe der negativen Exponenten eingeführt, wobey die Nenner gewöhnlich wegbleiben, und wie bey den Decimalbrüchen schon verstanden werden.

Es ist daher dem Gesagten gemäß

a) 1 Minute $= \frac{1}{60}$ Stunde $= 1 \times \frac{1}{60^1} =$ $1 \times 60^{-1} = 1^{-1}$ (§. 77. Zus. III.);

b) 1 Secunde $= \frac{1}{60}$ Minute $= \frac{1}{60 \cdot 60}$ Stunde $= \frac{1}{60^2} = 1 \times \frac{1}{60^2} = 1 \times 60^{-2} = 1^{-2}$.

c) 1 Terze $= \frac{1}{60}$ Secunde $= \frac{1}{60 \cdot 60}$ Minute $=$ $\frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 60}$ Stunde $= \frac{1}{60^3} = 1 \times \frac{1}{60^3} =$ $1 \times 60^{-3} = 1^{-3}$;

d) 1 Stunde $= \frac{60}{60}$ Stunde $= 1 \times 60^0 = 1^0$;

e) 1 Schock, d. i., 60 Stunden $= 1 \times 60 = 1^1$.

Um deswillen wird nachstehende Reihe so gelesen:

$28^1,\ 7^0,\ 54^{-1},\ 29^{-2},\ 34^{-3}$

acht und zwanzig Schocke von Stunden (oder Graden), 7 Stunden (oder Grade), 54 Minuten, 29 Secunden, 34 Terzen.

Zu einzifferigen Zahlen pflegt man öfters noch zur Linken eine Null hinzuzusetzen, damit durchaus zweyzifferige Zahlen erscheinen; z. B.

24^0	08^{-1},	18^{-2},	34^{-3},	09^{-4}
24 Stund.,	8 Min.,	18 Sec.,	34 Terz.,	9 Quarten.

c) Der allgemeine Ausdruck eines jeden Sexagimalbruches ist demnach $\frac{a}{60^m} = a \times 60^{-m}$ $= a^{-m}$, wo die Zahl 60 als Urgröße zum negativen Exponenten hin gedacht werden muß.

d) Die bey den Sexagesimalen an der Stelle der Urgrößen vorkommenden Zahlen sind eigentlich nur die Coefficienten der Potenzen von 60, wozu die rechts oben mit dem Zeichen (—) stehenden Zahlen die negativen Exponenten sind; z. B. 5^{-2} drückt, im Falle vom Zeitmaaße die Rede ist, $\frac{5}{3600}$ Stunden aus, und 48^{-5} bezeichnet $\frac{48}{777600000}$ Stunden, indem $5^{-2} = 5 \times 60^{-2} = 5 \times \frac{1}{60^2} = 5 \times \frac{1}{60.60}$ $= \frac{5}{3600}$, und $48^{-5} = 48 \times 60^{-5} = 48 \times \frac{1}{60^5}$ $= 48 \times \frac{1}{60.60.60.60.60} = \frac{48}{777600000}$ Stund.

e) Gleichwie jene Potenzen gleichartig genannt werden, welche gleiche Urgrößen und gleiche Exponenten haben, eben so werden auch die Sexagesimalen, indem sie immerhin 60 zur Urgröße haben, gleichartig genannt, wenn sie den nämlichen Exponenten haben; dabey versteht es sich von selbst, daß sich die gleichartigen Sexagesimalen jederzeit entweder auf die Eintheilung der Zeit, oder auf die Eintheilung der Kreislinie beziehen müssen; ist z. B. vom Zeitmaaße die Rede, so sind die Sexagesimalen „$+ 24^{-1}$ und $- 36^{-1}$ gleichartig, indem $+ 24^{-1} = + 24 \times 60^{-1}$, und $- 36^{-1} = - 36 \times 60^{-1}$, wo nun diese Potenzen die nämliche Urgröße 60 und den nämlichen Exponenten ($-^1$) haben, während die Zeichen (+ und —), und die Coefficienten 24 und 36 verschieden sind.

Anmerkung: 1) Betrachtet man die Sexagesimalen als gemeine Brüche, und bringt man dabey dasjenige in Anwendung, was im I. Theile §. 78. von den benannten Zahlen gesagt wurde, so können jene Sexagesimalen, die sich alle auf das Zeitmaaß, oder die Kreislinie beziehen, gleichartig, und, im Falle sie gleiche Exponenten haben, somit Brüche von gleichen Nennern sind, gleichnamig genannt werden.

2) Man muß sich wohl in Acht nehmen, daß man bey den Sexagesimalen z. B. den Ausdruck 24^{-2} nicht in dem Sinne nehme, als wenn $24^{-2} = \frac{1}{24^2}$ (§. 77. III. Zus.); indem hier 24^{-2} eben so viel ist als $24 \times 60^{-2} = 24 \times \frac{1}{60^2} = \frac{24}{60^2}$, da der Kürze wegen die Urgröße 60 gewöhnlich nicht angeschrieben, und deßhalb bey Sexagesimalbrüchen verstanden werden muß.

3) Das zwischen den einzelnen Ordnungen der Sexagesimalen gesetzte Comma ist nur der Kürze wegen anstatt des Additionszeichens (+) eingeführt worden; daher ist z. B. $4^0, 05^{-1}, 36^{-2} = 4^0 + 05^{-1} + 36^{-2}$. Kömmt aber das Comma zwischen den einzelnen Ziffern der nämlichen Ordnung der Sexagesimalen vor, so muß es in dem bey den Decimalbrüchen angegebenen Sinne genommen werden; z. B. der Sexagesimalbruch $4,5^{-2}$ drückt 4 ganze Secunden und 5 Zehntel derselben, oder kürzer „4 ganze 5 Zehentel Secunden aus.

4) Die hier vorkommenden negativen Exponenten werden manchmal auch mit römischen Ziffern, die man rechts oben hinschreibt, bezeichnet; daher kann z. B. anstatt „$7^0, 44^{-1}, 20^{-2}, 18^{-3}$ auch geschrieben werden „$7, 44^{I}, 20^{II}, 18^{III}$.

§. 101.

Aufgabe, einen Sexagesimalbruch in einen anderen Sexagesimalbruch niederer Ordnung zu verwandeln.

Auflösung:

1) Weil bey Sexagesimalen die Zahl 60 immerhin die Reductionszahl ist (I. §. 78. f.), und hier höhere Einheiten auf niedere zu reduciren sind

(I. §. 78. g.), so verfahre man, um diese Aufgabe aufzulösen, nach den im I. Theile im §. 90. A. und §. 91. A. aufgestellten Regeln, indem man immerhin, um Theile der niedrigeren Ordnung zu erhalten, mit der Reductionszahl 60 multiplicirt.

2) Besteht das zu reducirende Ganze aus mehreren Unterabtheilungen, so muß man zu dem jedesmaligen Producte die schon vorhandenen Einheiten der nämlichen Ordnung addiren.

I. Beyspiel:

Man soll 12^{-1} d. i., 12 Minuten auf Secunden, und dann auf Terzen reduciren, und somit den Werth dieses Sexagesimalbruches in einem andern Bruche ausdrücken, wo die Urgröße 60 zum Exponenten die Zahl ($-^2$), und ($-^3$) bekömmt.

Auflösung:

1) Man multiplicire 12 mit 60, man erhält 720, daher ist $12^{-1} = 720^{-2}$, d. i., 12 Minuten geben 720 Secunden.

2) Die Zahl 720 multiplicire man wieder mit 60, man erhält 43200, daher ist $12^{-1} = 720^{-2} = 43200^{-3}$, d. h., 12 Minuten geben auch 43200 Terzen.

Das nämliche Resultat, wie man offenbar sieht, erhält man, wenn man nach den im I. Theile aufgestellten Reductionsregeln verfährt, und man sich anstatt der negativen Exponenten ($-^1$, $-^2$, $-^3$) der Benennungen, „Minuten, Secunden, Terzen" bedient, indem 12 Minuten $\times$ 60 = 720 Secunden, und 720 Sec. $\times$ 60 = 43200 Terzen, weßhalb 12 Minuten = 720 Sec. = 43200 Terzen.

Beweis:

1) Eine Größe bleibt unverändert, wenn man sie mit der nämlichen Zahl multiplicirt und dividirt (I. §. 63. II. Zus.).

2) Ein Product wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt oder dividirt, wenn man nur einen Factor multiplicirt oder dividirt, und den anderen wieder

unverändert als Factor beysetzt (§. 53. VI. Lehrs. und II. Zus.).

3) Potenzen von gleichen Urgrößen werden dividirt, wenn man den Exponenten des Divisors von jenem des Dividends subtrahirt (§. 77. I. Zus.).

Daher ist $12^{-1} = 12 \times 60^{-1} = 12 \times 60^{-1} \times {}^{60}/_{60} = 12 . 60 \times 60^{-1} : 60 = 720 \times 60^{-1} : 60 = 720 \times 60^{-2} = 720^{-2}$, und $720^{-2} = 720 \times 60^{-2} = 720 \times 60^{-2} \times {}^{60}/_{60} = 720 . 60 \times 60^{-2} : 60 = 43200 \times 60^{-2} : 60 = 43200 \times 60^{-3} = 43200^{-3}$, weßhalb auch (I. §. 10. Nro. 4.) $12^{-1} = 43200^{-3}$.

Weil gleichartige Potenzen dadurch addirt werden, daß man ihre Coefficienten in eine Summe bringt (§. 75. a. und b.), so erhält man, im Falle z. B. diese Sexagesimalen „5^{0}, 16^{-1}, 09^{-2}, 28^{-3} auf die hier vorkommenden Einheiten der niedrigsten Ordnung zu reduciren sind, folgende Resultate:

1) $5^{0} = 300^{-1}$, indem $5^{0} = 5 \times 60^{0} = 5 \times 60^{0} \times {}^{60}/_{60} = 5 . 60 \times 60^{0} : 60 = 300 \times 60^{-1} = 300^{-1}$, und also $300^{-1} + 16^{-1} = 316^{-1}$;

2) $316^{-1} = 18960^{-2}$, indem $316^{-1} = 316 \times 60^{-1} \times {}^{60}/_{60} = 18960 \times 60^{-2} = 18960^{-2}$, und somit $18960^{-2} + 09^{-2} = 18969^{-2}$;

3) $18969^{-2} = 1138140^{-3}$, indem $18969^{-2} = 18969 \times 60^{-2} = 18969 \times 60^{-2} \times {}^{60}/_{60} = 1138140^{-3}$, und daher $1138140^{-3} + 28^{-3} = 1138168^{-3}$; weßhalb nun 5^{0}, 16^{-1}, 09^{-2}, $28^{-3} = 1138168^{-3}$.

Verfährt man, indem die Sexagesimalen wie benannte Zahlen betrachtet werden, nach den im I. Theile bey den Reductionen aufgestellten Regeln, so erhält man, im Falle die in diesem Theile dem §. 91. beygefügte Anmerkung benützt wird, das nämliche Resultat:

5 St. od. Gr.	316 Min.	18969 Sec.
× 60	× 60	× 60
300 Minuten	18960 Sec.	1138140 Terz.
+ 16 Minuten	+ 9 Sec.	+ 28 Terz.
316 Minuten	18969 Sec.	1138168 Terz.

Es geben also 5 Stunden (oder Grade) 16 Minuten 9 Secunden und 28 Terzen nach vorgenommener Reduction 1138168 Terzen, d. h., 5^{0}, 16^{-1}, 09^{-2}, $28^{-3} = 1138168^{-3}$.

§. 102.

Aufgabe, einen Sexagesimalbruch in einen anderen Sexagesimalbruch höherer Ordnung zu verwandeln.

Auflösung:

Aus den im vorigen §. angeführten Gründen geschieht die Auflösung dieser Aufgabe nach den im I. Theile im §. 90. B. und §. 91. B. aufgestellten Regeln; indem man immerhin, um Sexagesimalen höherer Ordnung zu erhalten, mit der Reductionszahl 60 dividirt.

Beyspiel:

Es soll der Sexagesimalbruch $12'000.000^{-3}$ auf jenen Bruch höherer Ordnung reducirt werden, auf den man ihn zu reduciren im Stande ist.

Auflösung:

1) Man dividire 12'000.000 mit 60, man erhält 200000, daher ist $12'000.000^{-3} = 200000^{-2}$, d. i., 12'000.000 Terzen geben 200000 Secunden;

2) die Zahl 200000 dividire man mit 60, man erhält 3333 zum Quotienten, und 20 zum Reste, daher ist $200000^{-2} = 3333^{-1} + 20^{-2}$, d. h., 200000 Secunden geben 3333 Minut. 20 Secunden; endlich

3) 3333 dividire man wieder mit 60, man erhält 55 zum Quotienten, und 33 zum Reste, daher ist $3333^{-1} + 20^{-2} = 55^{0} + 33^{-1} + 20^{-2}$, d. h. 3333 Mi-

nuten 20 Secund. geben 55 Stunden (oder Grade) 33 Minut. und 20 Secunden; 12'000.000 Terzen geben also 55 Stunden (oder Grade) 33 Minuten 20 Secunden und keine d. h. 00 Terzen, oder $12'000.000^{-3} = 55^{\circ}, 33^{-1}, 20^{-2}, 00^{-3}$.

Beweis:

Aus den beym Beweise des vorigen §. bey Nro. 1, 2, und 3 angeführten Gründen ist

1) $12'000.000^{-3} = 12'000.000 \times 60^{-3} = 12'000.000 \times 60^{-3} \times {}^{60}/_{60} = 12'000.000 \times 60^{-2} : 60 = (12000000 : 60) \times 60^{-2} = 200000 \times 60^{-2} = 200000^{-2}$;

2) $200000^{-2} = 200000 \times 60^{-2} = 200000 \times 60^{-2} \times \frac{60}{60} = 200000 \times 60^{-1} : 60 = (200000 : 60) \times 60^{-1} = \left(3333 + \frac{20}{60}\right) \times 60^{-1} = 3333 \times 60^{-1} + \frac{20}{60^2} = 3333 \times 60^{-1} + 20 \times 60^{-2} = 3333^{-1} + 20^{-2}$;

3) $3333^{-1} = 3333 \times 60^{-1} = 3333 \times 60^{-1} \times \frac{60}{60} = 3333 \times 60^{\circ} : 60 = (3333 : 60) \times 60^{\circ} = \left(55 + \frac{33}{60}\right) \times 60^{\circ} = 55 \times 60^{\circ} + \frac{33}{60} = 55 \times 60^{\circ} + 33 \times 60^{-1} = 55^{\circ} + 33^{-1}$, daher ist auch $3333^{-1} + 20^{-2} = 55^{\circ} + 33^{-1} + 20^{-2}$, weßhalb $12'000.000^{-3} = 55^{\circ} + 33^{-1} + 20^{-2} + 00^{-3} = 55^{\circ}, 33^{-1}, 20^{-2}, 00^{-3}$.

II.

Die vier Rechnungsarten mit Sexagesimalen.

§. 103.

Regel der Addition.

1) Man schreibe die gleichartigen Sexagesimalen der Ordnung nach unter einander, ziehe eine Linie, und fange zur Rechten bey der niedrigsten Ordnung die Addition an;

2) So oft die Partialsummen 60, d. i., Einheiten der nächsthöheren Ordnung enthalten, so wird mit 60 dividirt, wo dann der Rest an die vorige Stelle geschrieben, und der erhaltene Quotient zu den mit ihm gleichartigen Einheiten gezählet wird.

Beyspiel:

Summanden
$46^{0}, 28^{-1}, 44^{-2}, 04^{-3}$
$18^{0}, 12^{-1}, 40^{-2}, 24^{-3}$
$16^{0}, 04^{-1}, 03^{-2}, 18^{-3}$

Summe $= 1^{1}, 20^{0}, 45^{-1}, 27^{-2}, 46^{-3}$.

Anmerkung: Mit 60 kann sehr bequem reducirt werden; man sagt z. B. bey den hier vorkommenden Secunden „3 und 4 ist 7, man schreibt also 7 rechts an die Stelle der Secunden, ferner „4 und 4 giebt 8 zur Summe, 6 in 8 geht 1 mal, man schreibt also den Rest 2 links an die Stelle der Secunden, und zählt den Quotienten 1 als eine nächsthöhere Einheit zu den Minuten.

§. 104.

Regel der Subtraction.

1) Man schreibe so den Subtrahend unter den Minuend, daß die gleichartigen Sexagesimalen unter einander zu stehen kommen, ziehe unten eine Linie, und fange die Subtraction zur Rechten bey der niedrigsten Ordnung an.

2) Ist einmal der Subtrahend zu groß, so entlehne man eine Einheit der nächsthöheren Ordnung, reducire diese auf die nächstniederen Einheiten, und addire dazu, bevor man die Subtraction vornimmt, die im Minuend vorkommenden gleichartigen Einheiten.

3) Fehlen im Minuend die niedrigeren Ordnungen ganz, so entlehne man eine Einheit der höchsten Ordnung, und vertheile dieselbe so, daß man bey allen Ordnungen abziehen kann.

I. Beyspiel:

Minuend	$48^{\circ}, 36^{-1}, 08^{-2}, 18^{-3}$
Subtrahend	$30^{\circ}, 40^{-1}, 18^{-2}, 12^{-3}$
Rest =	$17^{\circ}, 55^{-1}, 50^{-2}, 6^{-3}$.

II. Beyspiel:

Eine Finsterniß begann um 10 Uhr, 56 Minuten, 48 Secunden, 17 Terzen Morgens, und endete um 3 Uhr Nachmittags; wie lange hatte sie gedauert?

Auflösung:

Weil hier der Minuend nur aus 15 Stunden (indem die dritte Stunde Nachmittags von Mitternacht an die 15te ist) besteht, so schreibe man $14^{\circ}, 59^{-1}, 59^{-2}, 60^{-3}$ anstatt 15 Stunden, da eine Stunde 59 Min. 59 Sec. und 60 Terzen hat:

Minuend	$14^{\circ}, 59^{-1}, 59^{-2}, 60^{-3}$
Subtrahend	$10^{\circ}, 56^{-1}, 48^{-2}, 17^{-3}$
Rest =	$4^{\circ}, 03^{-1}, 11^{-3}, 43^{-3}$.

Diese Finsterniß dauerte demnach 4 Stund. 3 Min. 11 Sec. und 43 Terzen.

§. 105.

Grund des Verfahrens in Absicht auf die Addition und Subtraction.

a) Betrachtet man die Sexagesimalen als Potenzen, so werden dieselben durch die hier angegebene

Verfahrungsweise den bey den Potenzen aufgestellten Regeln gemäß addirt, und von einander subtrahirt (§. 75. und 76.).

b) Betrachtet man sie als gemeine Brüche, so hat man, indem die gleichartigen Sexagesimalen unter einander geschrieben wurden, Brüche von gleichen Nennern dadurch addirt und subtrahirt, daß man ihre Zähler addirte, oder von einander subtrahirte, während der Summe oder dem Reste wieder der vorige Nenner gegeben wurde (II. §. 24. und 29.).

c) Werden endlich anstatt der negativen Exponenten die gehörigen Benennungen angeschrieben, so geschieht, im Falle man den hier aufgestellten Regeln gemäß verfährt, die Addition und Subtraction nach den bey den benannten Zahlen gegebenen Vorschriften (I. §. 96. und 98.).

§. 106.

Regeln der Multiplication.

a) Sind Sexagesimalen mit einer unbenannten Zahl zu multipliciren, so verfahre man nach den im I. Theile §. 101. aufgestellten Regeln.

b) Hat man Sexagesimalen mit einer unbenannten Zahl, welche Decimalen bey sich führt, zu multipliciren, so reducire man den Multiplicand nach §. 101. auf die in demselben vorkommenden Einheiten der niedrigsten Ordnung, multiplicire dann nach den bey den Decimalbrüchen aufgestellten Regeln, und reducire das erhaltene Product wieder nach Vorschrift des §. 102. auf die Einheiten höherer Ordnung.

c) Hat man endlich Sexagesimalen mit Sexagesimalen zu multipliciren, so betrachte man sie als Potenzen mit negativen Exponenten, und verfahre dann nach den bey den Potenzen aufgestellten Regeln (§. 80.).

Die etwa benöthigten Reductionen geschehen erst im Totalproducte nach den im §. 102. aufgestellten Regeln.

I. Beyspiel:

Von einem Mondesviertel bis zum anderen verfließen 7 Tag, 9^{0}, 11^{-1}, 00^{-2}, 45^{-3}; wie lange dauert eine Lunation, und wie lange dauern 12 Lunationen, d. i., ein Mondenjahr?

Auflösung:

Weil eine Lunation 4 Viertel hat, so muß man mit 4 multipliciren, und weil ein Mondenjahr 12 Lunationen hat, so muß dann das erhaltene Product mit 12 multiplicirt werden:

1) Multiplicand 7 T. 9^{0}, 11^{-1}, 00^{-2}, 45^{-3}
Multiplicator $\times 4$
Product $=$ 28 T. 36^{0}, 44^{-1}, 00^{-2}, 180^{-3}
$=$ 29 T. 12^{0}, 44^{-1}, 3^{-2}.

Eine Lunation beträgt also 29 T. 12 Stund. 44 Min. 3 Secunden.

2) Multiplicand 29 T. 12^{0}, 44^{-1}, 3^{-2}
Multiplicator $\times 12$
Product $=$ 348 T. 144^{0}, 528^{-1}, 36^{-2}
$=$ 354 T 8^{0}, 48^{-1}, 36^{-2}.

Ein Mondenjahr beträgt also 354 Tag 8 Stund. 48 Min., und 36 Secundrn.

II. Beyspiel:

Es soll 4^{0}, 38^{-1}, 12^{-2}, 07^{-3} mit 4,5 multiplicirt werden.

Auflösung:

1) In Gemäßheit des §. 101. ist 4^{0}, 38^{-1}, 12^{-2}, $07^{-3} = 1001527^{-3}$.

2) Nach der bey den Decimalbrüchen aufgestellten Multiplicationsregel ist $1001527^{-3} \times 4{,}5 = 4506871{,}5^{-3} = 20^{0}$, 51^{-1}, 54^{-2}, $31{,}5^{-3}$.

3) Daher ist (4^{0}, 38^{-1}, 12^{-2}, 07^{-3}) $\times 4{,}5 = 20^{0}$, 51^{-1}, 54^{-2}, $31{,}5^{-3}$.

III.

III. Beyspiel:

Es soll $12^{0}, 05^{-1}, 18^{-2}$, mit $4^{0}, 06^{-1}, 12^{-2}$ multiplicirt werden.

Auflösung:

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Multiplicand} & 12^{0}, & 05^{-1}, & 18^{-2}, & & & \\
\text{Multiplicator} & 4^{0}, & 06^{-1}, & 12^{-2}, & & & \\
\hline
\text{Partial-} & 48^{0} & +20^{-1} & +\ 72^{-2} & & & \\
\text{producte} & & +72^{-1} & +\ 30^{-2} & +108^{-3} & & \\
 & & & +144^{-2} & +\ 60^{-3} & +216^{-4} & \\
\hline
\text{Totalproduct} & =48^{0} & +92^{-1} & +246^{-2} & +168^{-3} & +216^{-4} & \\
 & =49^{0} & +36^{-1} & +\ 8^{-2} & +\ 51^{-3} & +\ 36^{-4} & \\
 & =49^{0}, & 36^{-1}, & 8^{-2}, & 51^{-3}, & 36^{-4}. &
\end{array}
$$

§. 107.

Regel der Division.

a) Sind Sexagesimalen mit einer unbenannten ganzen Zahl zu dividiren, so verfahre man nach der im I. Theile §. 105. bey den benannten Zahlen aufgestellten Regel.

b) Ist der Divisor eine ganze unbenannte Zahl mit einem angehängten Decimalbruche, so gebe man mittels beygesetzter Nullen allen Ordnungen des Multiplicands so viele Decimalstellen, als der Divisor hat, und verfahre dann nach der so eben bey a gegebenen Regel.

c) Sind Sexagesimalen durch Sexagesimalen zu dividiren, so betrachte man sie wie Potenzen, und dividire deßhalb in diesem Falle nach den im §. 80. aufgestellten Regeln.

d) Ist endlich eine unbenannte Zahl mit, oder ohne Decimalen — durch Sexagesimalen zu dividiren, so betrachte man den Dividend als einen Sexagesimalbruch mit dem Exponenten 0, und verfahre dann den hier aufgestellten Regeln gemäß:

I. Beyspiel:

Es sollen 354 Tag. 8°, 48^{-1}, 36^{-2} mit 12 dividirt werden (§. 106. I. Beysp.).

Auflösung:

Divid.	354 T.	8°,	48^{-1}, 36^{-2}	Quotient
Divis.	12	152°	528^{-1}	29 T., 12°, 44^{-1}, 3^{-2}
	24	: 12	: 12	36^{-2}
	114	12	48	: 12
	: 12	32	48	36^{-2}
	108	24	: 12	—
	6 T.	8°	48	
	× 24	× 60	—	
	144°	480^{-1}		
	+ 8°	+ 48^{-1}		
	152°	528^{-1}		

Weßhalb (354 T. 8°, 48^{-1}, 36^{-2}) : 12 = 29 T. 12°, 44^{-1}, 3^{-2}; d. h., wenn das Mondenjahr 354 T. 8°, 48^{-1}, 36^{-2} hat, dann beträgt eine Lunation 29 T. 12°, 44^{-1}, 3^{-2}.

II. Beyspiel:

Es soll 20°, 51^{-1}, 54^{-2}, $31{,}5^{-3}$ mit 4,5 dividirt werden (§. 106. II. Beysp.).

Auflösung:

Man setze jeder Ordnung mit Ausnahme der niedrigsten am Ende eine Null bey, damit man so durchgehends im Dividend und Divisor gleichviel Decimalstellen erhält, und dividire dann der im §. 17. aufgestellten Regel gemäß, indem man die im Dividend und Di-

visor vorkommenden Ziffern wie ganze Zahlen betrachtet, und man dadurch im Quotienten immerhin eine ganze Zahl erhält:

Divid.	$200^{0}, 510^{-1}, 540^{-2}, 315^{-3}$			Quotient
Divis.	45	1710^{-1}		$4^{0}, 38^{-1}, 12^{-2}, 07^{-3}$
	180	: 45	540^{-2}	315^{-3}
	20^{0}	135	: 45	: 45
	× 60	360	45	315
	1200^{-1}	: 45	90	—
	+ 510^{-1}	360	: 45	
	1710^{-1}	—	90	
			—	

Daher ist $(20^{0}, 51^{-1}, 54^{-2}, 31{,}5^{-3}) : 4{,}5 = 4^{0}, 38^{-1}, 12^{-2}, 07^{-3}$.

III. Beyspiel:

Es soll $18^{0}, 36^{-1}, 49^{-2}$ durch 15^{-1} dividirt werden.

Auflösung:

Dividend	$18^{0}, 36^{-1}, 49^{-2}$			Quotient
Divisor	15^{-1}			$1^{+1}, 14^{0}, 27^{-1}, 16^{-2}$
	15^{0}	216^{-1}	409^{-2}	
	3^{0}	: 15^{-1}	: 15^{-1}	
	× 60	15	30	
	180^{-1}	66^{-1}	109^{-2}	
	+ 36^{-1}	: 15^{-1}	: 15^{-1}	
	216^{-1}	60^{-1}	105^{-2}	
		6^{-1}	4^{-2}	
		× 60	× 60	
		360^{-2}	240^{-3}	
		+ 49^{-2}	: 15^{-1}	
		409^{-2}	240^{-3}	
			—	

Daher ist $18^{0}, 36^{-1}, 49^{-2}) : 15^{-1} = 1^{+1}, 14^{0}, 27^{-1}, 16^{-2}$.

Anmerkung: Die Auflösung solcher Aufgaben, zumal wenn im Divisor mehrere Ordnungen vorkommen, wird auch dadurch bewerkstelliget, daß man alles auf die niedrigste Ordnung reducirt, dann dividirt, und den Quotienten wieder auf höhere Ordnungen bringt.

IV. Beyspiel:

Es soll 6,023 durch $5^{0}, 17^{-1}$ dividirt werden.

Auflösung:

Weil $60^{0} = 1$ (§. 77. II. Zus.), und jede Größe unverändert bleibt, wenn man sie mit 1 multiplicirt, so ist $6{,}023 = 6{,}023 \times 60^{0} = 6{,}023^{0}$; daher dividire man $6{,}023^{0}$ mit $5^{0}, 17^{-1}$, man erhält, nachdem man vorhin beym Divisor die Reduction vorgenommen hat, zum Quotienten $0{,}019^{+1}$.

Das nämliche Resultat erhält man, wenn man dem Divisor $5^{0}, 17^{-1} = 317^{-1}$ mittels beygesetzter Nullen 3 Decimalstellen giebt, und dann den bekannten Regeln gemäß die Division vornimmt, oder wenn man den Decimal- und Sexagesimalbruch in Gestalt gemeiner Brüche ausdrückt, und dann nach den bey denselben im II. Theile aufgestellten Regeln verfährt.

In diesem letzten Falle ist $6{,}023 = 6\frac{23}{1000} = \frac{6023}{1000}$, und $5^{0}, 17^{-1} = 5\frac{17}{60} = \frac{317}{60}$, daher ist $6{,}023 : 5^{0}, 17^{-1} = \frac{6023}{1000} : \frac{317}{60} = \frac{6023 \,.\, 60}{317 \,.\, 1000} = \frac{19}{1000} \times 60 = 0{,}019 \times 60^{+1} = 0{,}019^{+1}$.

Anmerkung: 1) Wie die Sexagesimalbrüche zum Quadrate und Kubus erhoben, oder daraus die Quadrat- und Kubikwurzeln ausgezogen werden, ist aus dem ersichtlich, was sowohl in diesem Abschnitte in Betreff der Sexagesimalen, als auch im II. Abschnitte des I. Hauptstückes hinsichtlich der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln in Zahlen gesagt worden ist.

2) In Absicht auf die Probe bey den vier Rechnungsarten mit den Sexagesimalen kömmt das in Anwendung, was im §. 59. Anm. 2. gesagt wurde.

Anhang,

welcher das Maaß-, Gewicht- und Münz-System der alten Römer, Griechen und Hebräer, wie auch die in verschiedenen Ländern üblichen Maaße, und Gewichte enthält.

I. Abtheilung.

Das Maaß-, Gewicht- und Münz-System der alten Römer, Griechen und Hebräer, aus dem Lehrbuche des Hrn. Professors Weigl.

Quellen,

welche dabey von Hrn. Prof. Weigl benützt wurden:

1) Romé de l'Isle Metrologie. Paris 1789.
2) Bernardi Lami. Adparatus biblicus.
3) Voyage du jeune Anacharsis en Grèce, par M. l'Abbé Barthelemy. Paris 1788.

Damit wurden Nieuport's, Eisenschmids und Pauctons Angaben verglichen.

Voraussetzungen:

1) Der alte römische Fuß hielt 130,66 alte Pariser Linien. Hiemit stimmen alle noch vorhandenen, oder aufgefundenen Exemplare überein, welche Barthelemy, Jacquier, Grinon, Stuart gemessen haben.

2) Der alte römische Fuß verhielt sich zum griechisch-olympischen wie 24 : 25.

3) Der römische Quadrantal oder Amphora war genau der römische Kubikfuß, und wog mit Weine gefüllt 80 römische Pfund.

4) Nach Plinius dem Aelteren (Nat. hist. Lib. 33. Cap. 3.) waren die ersten Goldmünzen Roms von der Art, daß der Scrupel Gold, oder der vierundzwanzigste Theil der römischen Unze zu 20 Sesterzen, oder 5 Silberdenaren gerechnet wurde. Nun wogen viele solche Goldmünzen, die sich noch so unverletzt erhalten haben, als man nur wünschen kann, genau 21 alte Pariser Gran; und die Dreyscrupelstücke 63 P. Gran. Da ferner von den letztern 96, von den erstern aber 288 auf das römische Pfund giengen, so ist die wahre Schwere dieses Pfundes = 288 × 21 = 96 × 63 = 648 Pariser Gran.

5) Die Längenmaße der alten waren Theile eines Erdgrades im Meridian.

6) Das griechische Gewicht wurde, unabhängig von dem römischen, durch Abwägung vieler noch vorhandenen und gut erhaltenen griechischen Gold- und Silbermünzen bestimmt.

A) Maße der Römer.

a) Linien- und Längenmaße.

Römische Benennung.	Milliare.	Στάδιον ὀλυμπικόν.	Passus.	Cubitus.	Pes.	Palmus.	Digitus.
		8	1000	3333 1/3	5000	20000	80000
		1	125	416 2/3	625	2500	10000
			1	3 1/3	5	20	80
				1	1 1/2	6	24
					1	4	16
						1	4
							1
franz. Maß Dd.	4537' Fuß	567,125' —	4,537' —	1,3611' —	130,66''' Linien.	32,66''' —	8,166''' —
baier. Maß Dd.	5049,7' Fuß.	631,2125' —	5,0497' —	1,51491' —	12,11928'' Zolle.	36,3578''' Linien.	9,08946''' —

b) Flächenmaße.

Römische Benennung.	Saltus.	Centuria.	Haeredium.	Jugerum.	Actus quadratus (Acnua)	Clima.	Actus minimus.	Scripulum.
	1	4	400	800	1600	6400	48000	230400
		1	100	200	400	1600	12000	57600
			1	2	4	16	120	576
				1	2	8	60	288
					1	4	30	144
						1	7,5	36
							1	4,8
								1
römisches Maß.	Br. L. 4800 . 4800 23'040.000□' —	Br. L. 2400 . 2400 5'760.000□' —	Br. L. 240 . 240 57600 □' —	Br. L. 120 . 240 28800 □' —	Br. L. 120 . 120 14400 □' —	Br. L. 60 . 60 3600 □' —	Br. L. 4' . 120 480 □' —	Br. L. 10' . 10' 100 □' —
franz. Maß.	200,16 Hectares.	5004 Ares.	47422,776 □' Fuß.	23711,338 □'	11855,664 □'	2963,916 □'	395,18.. □' —	82,331 □' —
baier. Maß.	587,44 Tagw.	146,864 Tagw.	58745,6 □' Fuß.	29372,8 □' —	14686,4 □' —	3671,604 □' —	489,54 □' —	101,989 □' —

L. Br.

*) Versus war ein Kampanisches Fl. Maß = 100 . 100 = 10000 römische = 10198,9 baier. Q. Fuß.

**) Ein römisches Haeredium beträgt also ungefähr 1 1/2 baier. Tagwerk.

c) Maße für Flüssigkeiten.

Röm. Benennung.	Culeus.	Amphora Quadrantal	Urna.	Congius.	Sextarius.	Hemina	Quartarius.	Acetabulum.	Cyathus.	Ligula.
	1	20	40	160	960	1920	3840	7680	11520	46080
		1	2	8	48	96	192	384	576	2304
			1	4	24	48	96	192	288	1152
				1	6	12	24	48	72	288
					1	2	4	8	12	48
						1	2	4	6	24
							1	2	3	12
								1	1 ½	6
									1	4
										1
franz. Maß.	25820 französische	1291 D. d. Kubz.	645,5 —	161,75 —	26,9 —	13,5 —	6,75 —	3,375 —	2,25 —	0,5625 —
baier. Maß.	8 Eimer.	24 Maßkannen.	12 Maßk. —	3 Maßk. —	1/2 Maßk. —	1 Quart. —	1 Achterl. —	1/2 Achterl. —	1/3 Acht. —	1/12 Acht. —

d) Maße für Getreide und trockene Waaren.

Römische Benennung.	Quadrantal.	Modius.	Sextarius.	Hemina.	Quartarius	Acetabulum.	Cyathus.	Ligula.
	1	3	48	96	192	384	576	2304
		1	16	32	64	128	192	768
			1	2	4	8	12	48
				1	2	4	6	24
					1	2	3	12
						1	1 ½	6
							1	4
								1
franz. Maß.	1291 Par. Kubz.	430,3 —	26,9 —	13,5 —	6,75 —	3,375 —	2,25 —	0,5625 —
baier. Maß.	11 Sechztl. Metzen.	7 Maßl oder 32ßigstl.	½ Maßkanne.	1 Quart —	1 Achterl —	½ Acht. —	⅓ Acht. —	1/12 Acht. —

e) Gewicht.

Römische Benennung	Libra Pondo, As	Uncia.	Semuncia.	Duella.	Scilicus.	Sextula.	Drachma (Denarius).	Scrupulus.	Obolus.	Semiobolus.	Siliqua.	Lens.
*) Die italienische oder römische Mine glich 1 2/3 röm. Pfd.	1	12	24	36	48	72	96	288	576	1152	1728	2304
		1	2	3	4	6	8	24	48	96	144	192
			1	1 1/2	2	3	4	12	24	48	72	96
				1	1 1/3	2	2 2/3	8	16	32	48	64
					1	1 1/2	2	6	12	24	36	48
						1	1 1/3	4	8	16	24	32
							1	3	6	12	18	24
								1	2	4	6	8
									1	2	3	4
										1	1 1/2	2
											1	1 1/3
												1
alt franz. Gran.	6048	504	252	168	126	84	63	21	10,5	5,25	3,5	2,625
baier. Pfd. Handelsg. Gran.	4407	367,3	183,65	122,4	91,8	61,2	45,9	15,3	7,65	3,8	2,55	1,913
köllnisches Markgewicht.	1 Mark 24488,5 Richtpfenn.	Richtpf. 7502	Rpf. 3751	Rpf. 2501	Rpf. 1875,5	Rpf. 1250,5	Rpf. 937,75	Rpf. 312,5	Rpf. 156,75	Rpf. 78,38	Rpf. 52,25	Rpf. 39,19

Anmerkungen: 1) Folgende Unterabtheilungen des römischen Pfundes wurden mit einem bestimmten Namen bezeichnet:

Sextans = 1/6 As. = 2 Unciis.	Septunx = 7/12 As. = 7 Unc.
Quadrans = 1/4 As. = 3 Unc.	Bes = 2/3 As. = 8 Unc.
Triens = 1/3 As. = 4 Unc.	Dodrans = 3/4 As. = 9 Unc.
Quincunx = 5/12 As. = 5 Unc.	Dextans = 5/6 As. = 10 Unc.
{Sextunx / Semissis} = 1/2 As. = 6 Unc.	Deunx = 11/12 As. = 11 Unc.

2) Das Geld der Alten ist von ihrem Gewichte abhängig. Die Römer hatten Gold-, Silber- und Kupfermünzen; aber das Verhältniß des Werths dieser Metalle gegen einander war nicht immer das nämliche, wiewohl die Haupteintheilung des Pfundes (im Silber oder Gold) in seine kleinern Theile fast durchaus unverändert blieb.

3) Unter den römischen Kupfermünzen war die Einheit der Aß (As), dessen Vervielfachungen folgende sind:

a) Dupondius = 2 Assibus.	e) Sexis = 6 Assibus.
b) Sestertius = 2 1/2 Assib.	f) Septussis = 7 Assib.
c) Tressis, seu Tripondius = 3 Assib.	g) Vigesis = 20 Assib. bis
d) Quinquessis = 5 Assib.	h) Censussis seu Centum pondium = Assib.

Der römische Aß war anfänglich ein Pfund Kupfer, und würde nach baierischem Gelde, wenn nach dem Münzfuß von 1762 die Köllner Mark Kupfer zu 100 Pfenning (im 20 fl. Fuß) ausgemünzt werden soll, 41,2 Kreuzer betragen haben. Bey den Römern war aber der Werth des Kupfers anfänglich viel geringer, und verhielt sich zum Werthe des Silbers nur wie 1 : 960. Doch hob sich der Werth des Kupfers in der Folge, als man den Aß nach und nach bis auf eine Unze reducirte.

In den alten Zeiten der römischen Republik, wo der Aß ein Pfund wog, galt der Silberdenar 10 Aß, oder 10 Pfund Kupfer, der Quinar 5 Aß, die Sesterze 2 1/2 Aß.— Die Libelle, eine andere kleine Silbermünze, galt einen pfündigeu Kupferaß; die Sembelle oder Selibelle einen Semissis oder halben Aß; der Teruncius einen Quadrans von drey Unzen.

Aber nach Verringerung des Aßes bis auf eine Unze Kupfers wurde beschlossen, daß der Denar 16 solcher Aß (16 Unzen Kupfer), der Quinar derer 8, und die Sesterze derer 4 gelten sollte, daher die letztere auch den Namen Quadrans führt. — Uebrigens ist zu merken, daß man in allen Summen, wo Sesterzen oder Denare vorkommen, jederzeit nach altem Gebrauch die Sesterze zu 2 1/2 Aß, und den Denar zu

10 Aß zu verstehen habe, wenn nicht die Schriftsteller ausdrücklich das Gegentheil sagen.

* Der Denar, welcher unter den Kaisern der tägliche Sold eines Soldaten war, hatte für diesen allein den Werth von 10 Aß, auch nach der Reduction.

4) Um den Werth der römischen Gold- und Silbermünzen richtig bestimmen zu können, muß man neun verschiedene Perioden unterscheiden (angefangen vom Jahre V. C. 547, d. i., 207 Jahre vor Christus, wo in Rom die ersten Goldmünzen geprägt wurden). Nimmt man nun an, daß nach oben bemeldten Münzfuß die köllnische Mark Goldes zu 283,1 fl.; die Mark Silber aber zu 20 fl. ausgeprägt werden soll, so ergiebt sich für den Werth der römischen Münzen, im Vergleiche mit unserm (baierischen) Gelde, folgende Berechnung:

Zeitraum.	Zahl der Aureus auf das Pfund Gold.	Zahl der Denarius auf das Pfund Silber.	Zahl der Sestertius a. d. Pfd Gold.	Verhältniß des Silbers zum Golde.	Werth eines Aureus oder Golddenars.	Werth eines Silberdenars.
I. Zeitr. V. C. 547 — 560	96	96	5760	1 : 15	5 fl. 9 kr.	20 kr. 5 hl.
II. 560 — 620	48	84	4800	1 : 14 $\frac{2}{7}$	9 fl. 48 kr.	23 kr. 3 pf.
III. 620 — 635	45	84	4500	1 : 13 $\frac{11}{28}$	9 fl. 48 kr.	23 kr. 3 pf.
IV. 635 — 650	42	84	4200	1 : 12 $\frac{1}{2}$	9 fl. 18 kr.	23 kr. 3 pf.
V. 650 — 715	40	84	4000	1 : 11 $\frac{91}{21}$	9 fl. 48 kr.	23 kr. 3 pf.
VI. 715 — 767	41	86	4100	1 : 11 $\frac{69}{86}$	9 fl. 30 kr.	23 kr.
VII. V. Tode Augusts bis Nero	41	88	4100	1 : 11 $\frac{57}{88}$	9 fl. 16 kr.	22 kr. 2 pf.
VIII. V. Tode Neros bis Caracalla	45	96	4500	1 : 11 $\frac{23}{32}$	8 fl. 35 kr.	20 kr. 5 hl.
IX. Unt. Constantin d. Großen	72 Solidi	100	1440	1 : 14 $\frac{2}{5}$	6 fl. 35 $\frac{3}{4}$ kr.	19 kr. 3 pf.

5) Die Werthe der römischen Münzen aus der II. III. IV. Vten Epoche pflegt man die mittleren zu nennen, und darnach ist auch die folgende Tabelle eingerichtet. — In der neunten Epoche trat an die Stelle des Golddenars der Solidus (Soud'or); auch gab es Quinar's oder halbe Solidi. — In der folgenden Tabelle ist der mittlere Werth eines Denars zu 24 kr. baier. angenommen.

f) Römische Münzen.

(Nach ihrem mittleren Werthe.)

Römische Benennung.	Sesterrium.	Aureus: Denarius.	Aureus: Quinarius (Victoriatus)	Argenteus: Denarius.	Argenteus: Quinarius (Victoriatus)	Sestertius.	Libella (As.)	Sembella.	Teruncius.
	1	10	20	250	500	1000	2500	5000	10000
		1	2	25	50	100	250	500	1000
			1	12 1/2	25	50	125	250	500
				1	2	4	10	20	40
					1	2	5	10	20
						1	2 1/2	5	10
							1	2	4
								1	2
									1
Werth im baier. Gelde.	100 fl.	10 fl.	5 fl.	24 kr.	12kr.	6 kr.	2 2/5 kr.	1 1/5 kr.	2 2/5 pf.

Anmerkung: Die große Sesterze (Sestertium) war keine wirkliche, sondern eine Rechnungsmünze, und galt 1000 kleine Sesterzen. Man bezeichnete die große Sesterze durch die Buchstaben HS. Z. B. CHS = 100 große = 100000 kleine Sesterzen. Hier ist nun zu merken, daß, wenn die Zahl über 100000 steigt, die Worte: Centena millia von den Römern gewöhnlich ausgelassen worden, und also zu suppliren seyen. In einem solchen Falle stehen blos die Adverbia Numeralia mit Numûm, oder Sestertium. Z. B. Quinquagies Numûm = 50'000,000 kleine = 50000 große Sesterzen.

B) Maße der Griechen.

a) Kleinere Linien- und Längenmaße.

			fr. Lin.	oder baier. Lin. Dd. Maß.
(α) Δάκτυλος	= 1	beträgt	7,7004 —	8,57 —
(β) Κόνδυλος	= 2	Δακτύλοις —	15,4008 —	17,14 —
(γ) Παλαιστή	= 4	— —	30,8016 —	34,28 —
(δ) Λιχάς	= 10	— —	77,004 —	85,7 —
(ε) Ὀρθόδωρον	= 11	— —	84,7044 —	94,27 —
(ς) Σπιθαμή	= 12	— —	92,4048 —	102,84 —
Ποῦς γεωμετρικός	= 16	— —	123,2064 —	137,12 —
(ζ) Πυγμή	= 18	— —	138,6072 —	154,26 —
(η) Πυγών	= 18 $\frac{14}{27}$	— —	142,6052 —	158,7 —
(θ) Πῆχυς	= 24	— —	1,2834 Fuß	1,4283 Fuß
Βῆμα ἁπλοῦν	= 40	— —	2,139 —	2,366 —
Ξύλον	= 72	— —	3,8502 —	4,285 —
Βῆμα διπλοῦν	= 80	— —	4,278 —	4,7333 —
Ὀργυιά, ἑξαπόδης	= 96	— —	5,1336 —	5,7133 —
(ι) Ἄκαινα δεκαπόδης	= 160	— —	8,556 —	9,466 —
Ἄκαινα δωδεκαπόδης	= 192	— —	10,2672 —	11,4266 —
Πλέθρον	= 1600	— —	85,56 —	94,66 —
Σχοῖνος der Persische	= 1920	— —	102,672 —	114,266 —

* α. Fingerbreite.
β. Die halbe Querhand.
γ. Die Querhand oder Breite der vier Finger.
δ. Die Spanne zwischen Daum und Zeigfinger.
ε. Gerade Hand der Länge nach vom Gelänke bis zum äußersten Finger.
ς. Spanne zwischen dem Daumen und kleinen Finger.

ζ. Die Länge von den eingelegten Fingern bis zum Ellenbogen, mittlerer griech. Fuß.

η. Großer griech. Fuß.

ϑ. Die gemeine oder lithische Elle, auch Mittel-Elle Herodots genannt.

ι. Gemeine Ruthe.

Anmerkung: Außer diesen gab es in den verschiedenen Staaten Griechenlands noch folgende Fuß- und Ellenmaße:

			fr. Linien.	baier. Linien
1. Der Fuß des kleinen Stadiums . .	= 6 9/16	Δακτύλ	= 73,6349	= 81,95
2. Der Fuß des Cleomedischen Stadiums .	12 13/16	—	= 98,6613	= 109,8
3. Der Pythische oder Delphische Fuß (auch Fuß von Marseille)	14 2/9	—	= 109,5168	= 121,88
4. Der griechisch-olympische Fuß . . .	17,69	—	= 136,11	= 151,6033
5. Königl. oder philetärische Fuß . . .	20	—	= 154,008	= 171,4
6. Die pythische od. delphische oder die kleine Elle v. Aegypten u. Samos	21 1/3	—	= 164,2752	= 182,83
7. Die königl. od. babyl. Elle des Herodot, schwarze Elle der Araber .	27	—	= 207,9108	= 231,39
8. Die heil. Elle, Elle von Kairo, Elle des Nilmessers, hachemische Elle der Araber .	32	—	= 246,4128	= 274,24
9. Chebel, od. Feldmesserkette, halber persischer Σμοινος . . .	960	—	= 51,336 Fuß	= 57,133 Fuß
10. Die Ἄρουρα, oder das gewöhnliche Flächenmaß hatte 10 gem. Akänen in der Länge, u. eben so viele in der Breite	= 85,16 × 85,16	franz. Fuß	= 7252,2 □ Fuß fr. Maß	= 8961,7 □ Fuß baier. Maß.

b)

b) Reisemaße der Alten.

	franz. Fuß.	gehen auf die geogr. Meile.
1. Stadium des Aristoteles, (der Märsche Alexander des Großen)	306,812	74,323
2. Stadium des Cleomedes . .	411,09	55,47
3. Pythisches oder Delphisches Stadium	456,32	49,972
4. Stadium des Eratosthenes . .	486	46,92
5. Nautisches Stadium des Herodot und Possidonius	513,36	44,419
6. Griechisch-Olympisches Stadium	567,13	40,208
7. Philetärisches oder königl. Stadium	641,7	35,535
8. Das große Stadium, auch das Aegyptische oder Alexandrinische genannt	684,09	33,333
9. Der Δίαυλος	1026,72	22,210
10. Das Ἱππικόν	2053,44	11,105
11. Die Persische oder Asiatische Meile	5133,6	4,4419
12. Die Indische Koß	7700,4	2,9613
13. Der Δολιχός	8221,8	2,7735
14. Die Parasange des Herodot .	15400,8	1,4806
15. Der Σχοῖνος von Delta oder Nieder-Aegypten	20534,4	1,1105
16. Der Σχοῖνος von Ober-Aegypten oder der Thebaische . . .	30801,6	0,7752
17. Der Heptanomische Σχ. von Mittel-Aegypten	61603,2	0,3876
18. Die Tagreise Διαιτα . . .	154008	0,14806

c) Maße für Flüssigkeiten.

griech. Benennung.	Μετρητής.	Χοῦς.	Ξέστης.	Κότυλος.	Τέταρτον.	Ὀξύβαφον.	Κύαθος.	Κόγχη.	Μύστρον.	Χήμη.	Κοχλιάριον.
	1	12	72	144	288	576	864	1728	3456	4320	8640
		1	6	12	24	48	72	144	288	360	720
			1	2	4	8	12	24	48	60	120
				1	2	4	6	12	24	30	60
					1	2	3	6	12	15	30
						1	1 ½	3	6	7 ½	15
							1	2	4	5	10
								1	2	2 ½	5
									1	1 ¼	2 ½
										1	2
											1
franz. Maß.	1540,8 Kubikzoll	128,4	21,4	10,7	5,35	2,675	1,79	0,895	0,452	0,358	0,179
baier. Maß.	28,6 b. Maßkannen	2,4	0,4	0,2	0,1	0,05	0,033	0,0166	0,00833	0,00666	0,0033

d) Getreidemaße.

Μέδιμνος.	Ἑκτεύς.	Χοῖνιξ.	Ξέςης.	Κότυλος.	Οξύβαφον.	Κύαθος.	Κοχλιάριον	franz. Kubikzoll.
1	6	48	96	192	768	1152	11520	1540,8
	1	8	16	32	128	192	1920	256,6
		1	2	4	16	24	240	32,08
			1	2	4	6	60	16,04
				1	2	3	30	8,02
					1	1 1/2	15	2,005
						1	10	1,336
							1	0,1336
26 1/2 Dreyßger	4 5/12 —	1 10/108 Sechziger	59/108 —	0,15 Maßkanne	0,075 —	0,05 —	0,005 —	baier. Maß

Anmerkung: 1. Der Μητρητής war ein Körpermaß, dessen Länge, Breite, Höhe einen griechischen Fuß betrug. Er heißt manchmal auch Κάδος, διώτη. Es gab in Griechenland acht verschiedene Metreten nach Verschiedenheit der Fußmaße, welche zu Grunde gelegt wurden:

			fr. Kubz.		b. Maß.
1. Metretes oder Kubus des delphischen Fußes . .	=		760,21	=	14,074
2. — — des geometr. Fußes	=		1082,4	=	20,082
3. — — des griechisch olympischen Fußes . .	=		1459,2	=	27,077
4. — — der Pygme oder des mittlern griechischen Fußes	=		1540,8	=	28,593
5. — — des Pygon . . .	=		1678,4	=	31,145
6. — — des königlichen oder Philetärischen Fußes	=		2113,6	=	39,13
7. — — der Pythischen oder kleinen Elle (ägyptischer Metretes oder des Ptolemäus) .	=		2564,3	=	47,584
8. — — der Mittel-Elle von 24 Δακτύλ. oder Syrischer Metretes	=		3652,9	=	67,784

Die vorangehenden Reductionen beziehen sich auf den mittlern attischen Metretes.

Anmerkung: 2. Das griechische Gewicht hatte mit dem Gelde einerley Eintheilung. Die folgende Reduction bezieht sich auf die attische Mitteldrachme von 78 Pariser Gran.

c) Münzen und Gewicht der Griechen.

Τάλαντον	Μνᾶ	Τετράδραχμον	Δίδραχμον	Δραχμη	Γράμμα	Ὀβολός	Κεράτιον	Χαλκοῦς	Λεπτόν	Gewichtsbetrag: köllnisches Markgewicht	Gewichtsbetrag: baier. Handelsgewicht.
1	60	1500	3000	6000	18000	36000	108000	288000	1'728.000	106 Mark 19364 Richtpf	44,4 Pfd.
	1	25	50	100	300	600	1800	4800	28800	1 Mark 50567 Richtpf.	23,7 Loth
		1	2	4	12	24	72	192	1152	4644,12 R.	3,8 Qtl.
			1	2	6	12	36	96	576	2322,06 R.	1,9 Qtl
				1	3	6	18	48	288	1161,03 R.	3,8 Pfaw.
					1	2	6	16	96	387,01 R.	1,266 Pfg
						1	3	8	48	193,505 R.	9,5 Gran
							1	2 2/3	16	64,50166 R.	3,166 Gr.
								1	6	24,1882 R.	1,185 Gr
									1	4,04704 R.	0,1975 Gr.
Geldbetrag											
fl. 2551,68	fl. 42,5	fl. 1,7011	kr. 51,13	kr. 25,5	kr. 8,5	kr. 4,25	kr. 1,416	hl. 4,25	hl. 0,708	—	—

Verschiedene Talente und Drachmen der Griechen.

	Pariser Gran	Als Gewicht		Als Münzen.
		fölln. Mark	Richtpfenning.	
1. Drachme von Aegium, oder die Peloponnes. . . .	60	—	893,10	19,6 kr.
Talent	—	81	50184	1962,84 fl.
2. Drachme von Samos, oder kleine Attische (auch ὁλκή genannt)	63	—	937,755	20,6 kr.
Talent	—	85	55970	2060 fl.
3. Drachme von Chalcis und Euböa (Rhodus) . .	66	—	982,41	21,5 kr.
Talent	—	89	61756	2159,1 fl.
4. Drachme von Tyrus oder Phönizische	69	—	1027,065	22,5 kr.
Talent	—	94	2006	2257,26 fl.
5. Drachme von Euphesus oder die Jonische	72	—	1071,72	23,5 kr.
Talent	—	98	7792	2355,42 fl.
6. Drachme von Creta oder Chios	75	—	1116,375	24,5 kr.
Talent	—	102	13578	2453,52 fl.
7. Attische oder Mitteldrachme	78	—	1161,03	25, kr.
Talent	—	106	19364	2551,68 fl.
8. Attisch-sicilische Drachme	81	—	1205,685	26,49 kr.
Talent	—	110	25150	2649,84 fl.
9. Große Attische oder Korintische Drachme . .	84	—	1250,34	27,4 kr.
Talent	—	119	3256	2747,94 fl.
10. Drachme von Abacöne oder Jstros	90	—	1339,65	29,4 kr.
Talent	—	122	42508	2944,26 fl.
11. Drachme von Pylos oder Elis	96	—	1428,96	31,4 kr.
Talent	—	130	54080	3140,52 fl.
12. Drachme von Reggium oder Naxos	105	—	1562,925	34,3 kr.
Talent	—	143	5903	3434,94 fl.
13. Drachme von Alexandrien	126	—	1875,51	41,2 kr.
Talent (auch das Hebräische) . . .	—	171	46404	4121,94 fl.
14. Drachme von Aegina	140	—	2083,9	45,7 kr.
Talent	—	190	51560	4579,92 fl.

C) Hebräische Maße.

a) Längenmaße.

Sabbatherweg.	Kaneh Ruthe.	Amah Elle.	Zereth Spanne	Tophach Palme	Ezbeah Finger	franz. Fußmaß.	baier. Fußmaß.
1	333 1/3	2000	4000	12000	48000	3422,4 F.	3826,877 F.
	1	6	12	36	144	10,2672 F.	11,4266 F.
		1	2	6	24	20,5344 Z.	22,8533 Z.
			1	3	12	10,2672 Z.	11,4266 Z.
				1	4	3,4224 Z.	3,8088 Z.
					1	10,2672 L.	11,4266 L.

* Die Hebräische Meile betrug 4106,88 franz. Fuß.
** Der Gibrath = 1/2 Sabbatherweg = 1711,2 franz. Fuß.

b) Maße für Flüssigkeiten.

Bathus.	Hin	Logus.	Ovum Rabbin.	franz. Kubz.	baier. Maßkannen
1	6	72	432	1082,4	20,085
	1	12	72	180,4	3,314
		1	6	15,033	0,276
			1	2,505	0,046

• Der Bathus, Epha, oder hebräische Metretes war der kubirte Zereth.

c) Getreidmaße.

Hebräis. Benennung.	Corus, s. Chomer	Lethech	Epha	Seah, s. Satum	Homer s. Gomor	Kabus.	Ovum Rabbin
	1	2	10	30	100	180	4320
		1	5	15	50	90	2160
			1	3	10	18	432
				1	3 1/3	6	144
					1	1 1/5	43 4/5
						1	24
							1
franz. Kubikz.	10824 —	5412 —	1082,4 —	360,8 —	108,24 —	60,133 —	2,5055 —
baier. Maß	5794 Metzen	2,897 —	0,5794 —	0,1931 —	0,05794 —	0,0322 —	0,00134 —

d) Münzen und Gewicht.

Kikar (Talent)	Maneh (Mine)	Sekel (Siclus)	Gerah (Obolus)	Minutum Λεπτὸν	Als Gewicht cöllnisches Markgewicht	Als Geld
1	50	3000	60000	2592000	171 Mk. 46404 Rpf.	4121,94 fl.
	1	60	1200	51.840	3 Mk. 28453,2 Rpf.	82,4308 fl.
		1	20	864	3751,02 Rpf.	1,37398 fl.
			1	43 1/5	187,551 Rpf.	4,12194 kr.
				1	4,34143 Rpf.	0,76 hl.

Vermischte Anmerkungen: 1. Die kleine attische Tetradrachme, oder der griechische Stater (Στατήρ) war zugleich der hebräische Sekel (Siclus, oder schlechthin argenteus), d. i., die Alexandrinische Didrachme.

2. Der attische Aureus (χρυσέος) wog eine silberne Didrachme, hatte aber dabei einen zehnfachen Werth.

3. Bey den Hebräern war das Verhältniß des Silbers zum Golde wie 1 : 12. Das hebräische Talent Goldes betrug also nach unserem Gelde 45463,28 fl.

II. Abtheilung.

Von den in verschiedenen Ländern und Städten üblichen Maaßen, und Gewichten.

A.

Tabellen, welche die in verschiedenen Ländern und Städten üblichen Maaße und Gewichte im Verhältnisse zu den französischen und baierischen darstellen.

I. Tabelle.

Das Längenmaaß, welches Fuß oder Schuh genannt wird.

Namen der Länder und Städte.	1 Fuß hält natürliche Millimètr.	1000 baierische Fuß geben	hievon der Logarithmus.
Amsterdam . . .	283,1066	1030,916	3,0132234
Ansbach	299,8469	973,367	2,9882767
Augsburg . . .	296,1904	985,377	2,9936024
Baden, Großherzogth.	300	972,864	2,9880521
Baiern	291,8592	1000	3,0000000
Baireuth . . .	297,7705	980,15	2,9912925
Berlin und Preußen überhaupt . .	313,8536	929,9214	2,9684463
Bern	293'0553	995,2305	2,9979237
Böhmen, Pragerfuß	296,416	984,6596	2,9932861
Brandenburg . .	313,8536	929,9214	2,9684463
Braunschweig . .	284,2345	1026,825	3,0114966
Breslau	287,9566	1013,552	3,0058463
Brüssel	291,002	1002,946	3,0012774
Cölln	275,2112	1060,492	3,0255073
Cracau	356,4211	818,8606	2,9132100
Dänemark . . .	313,8536	929,9214	2,9684463
Dresden	283,1066	1030,916	3,0132234

Namen der Länder und Städte.	1 Fuß hält natürliche Millimètr	1000 baierische Fuß geben	hievon der Logarithmus.
England	304,8934	957,2499	2,9810253
Eichstädt	304,0498	959,96	2,9822287
Frankfurt am Main	286,4903	1018,74	3,0080634
Frankreich, alter Pariser Fuß . . .	324,8394	898,472	2,9535046
Neues Maaß — Mètre	1000	291,8591	2,4651733
Genua, Palmo . .	249,833	1168,217	3,0675234
Gotha	287,6183	1014,745	3,0063569
Hamburg . . .	286,4903	1018,74	3,0080634
Hannover . . .	292,13	999,0732	2,9995973
Leipzig, Baufuß .	282,6555	1032,562	3,0139160
gemeiner Fuß .	282,2043	1034,213	3,0146098
Mähren	295,5137	986,128	2,9939333
Mannheim . . .	290,0208	1006,339	3,0027443
Magdeburg . . .	283,5578	1029,277	3,0125318
Memmingen, Werk- und geom. Schuh	290,6	1004,332	3,0018776
Neapel, Palmo . .	264,137	1104,867	3,0433102
Nürnberg . . .	304,0498	959,906	2,9822287
Portugall . . .	338,6	861,9586	2,9354864
Regensburg . . .	313,5603	930,7912	2,9688523
Rheinländischer Fuß	313,8536	929,9214	2,9684463
Rom, alter Fuß .	294,762	990,152	2,9957019
Rußland	538,2409	542,2464	2,7341967
Salzburg . . .	296,6416	983,8782	2,9929413
Schweden . . .	296,8672	983,1307	2,9926112
Spanien . . .	282,6555	1032,562	3,0139160
Turin (Palmo di Liprando) . . .	513,6524	568,2038	2,7545041
Tyrol	334,111	873,54	2,9412827
Venedig	347,3977	840,13	2,9243464
Warschau . . .	356,421	818,86	2,9132097
Wien	316,1094	923,2854	2,9653360
Württemberg . .	286,4903	1018,74	3,0080634
Würzburg . . .	292,1795	998,9037	2,9995236
Zürch	300,9276	969,865	2,9867113

II. Tabelle.

Das Längenmaaß, welches Elle genannt wird.

Namen der Länder und Städte.	1 Elle hält natürliche Millimètr.	1000 baierische Ellen geben	hievon der Logarithmus.
Amsterdam . . .	690,284	1206,765	3,0816226
Ansbach	624,3686	1334,164	3,1252093
Augsburg, große .	606,367	1373,772	3,1379147
kleine .	586,516	1420,204	3,1523707
Baden, Großherzogth.	600	1388,35	3,1424990
Baiern	833,0102	1000	3,0000000
Baireuth . . .	658,025	1265,92	2,1024063
Berlin, und Preußen überhaupt . .	667,7255	1247,534	3,0960523
Bern	541,6248	1537,984	3,1869518
Böhmen, Prager Elle	593,96	1402,468	3,1468931
Brabanter Elle, in Deutschland . .	691,4168	1204,796	3,0809135
Braunschweig . .	570,725	1459,565	3,1642235
Breslau	575,9133	1446,416	3,1602932
Brüssel, große . .	694,3443	1199,707	3,0790754
kleine . .	684,4188	1217,106	3,0853284
Cölln	694,7955	1198,928	3,0787933
Cracau, große . .	616,969	1350,165	3,1303867
kleine . .	565,312	1170,477	3,1683629
Dänemark . . .	627,7073	1327,168	3,1228932
Dresden	565,9877	1471,781	3,1678433
Eichstädt	772,8474	1077,846	3,0325566
England, kleine .	914,739	910,6534	2,9593531
große .	1143,48	728,487	2,8624217
Frankfurt am Main	539,545	1543,77	3,1885828
Frankreich, alte aune	1188,37	700,968	2,8456982
Mètre .	1000	833,0102	2,9206503
Genua, v. 10 Canna Palmi . . .	2408,331	333,4266	2,5230003
Gotha	565,311	1473,547	3,1683629
Hamburg . . .	572,9807	1453,819	3,1625103
Hannover . . .	584,26	1425,753	3,1540442

Namen der Länder und Städte.	1 Elle hält natürliche Millimètr.	1000 baierische Ellen geben	hievon der Logarithmus.
Leipzig	565,311	1473,547	3,1683629
Mähren	790,668	1053,552	3,0226560
Magdeburg . . .	666,823	1249,222	3,0966396
Mailand, Seide .	536,436	1552,86	3,1911323
Wolle .	675,396	1233,36	3,0910898
Mannheim . . .	557,867	1493,206	3,1741199
Memmingen . .	706,45	1179,122	3,0715689
Neapel, Canna v. 4 Brac.	2112,81	394,2665	2,5957898
Nordamerika, Yards	914,740	910,65	2,9593518
Nürnberg . . .	656,627	1268,62	3,1033316
Portugall . . .	2185,9	381,0835	2,5810202
Regensburg . . .	810,03	1028,37	3,0121492
Rom, Braccio .	634,79	1312,26	3,1180199
Canna .	1989,64	418,674	2,6218760
Rußland	711,49	1170,8	3,0684823
Salzburg, in Seide	800,82	1040,2	3,0171156
in Leinwand	1005,649	828,331	2,9182039
Schlesische Elle .	579,0104	1438,68	3,1579652
Schweden . . .	593,7344	1403,001	3,1470581
Spanien	847,9662	982,3622	2,9922717
Triest, Wolle . .	676,749	1230,9	3,0902227
Seide . .	642,1444	1297,232	3,1130176
Turin	600,953	1386,149	3,1418098
Türkey, große Pik	669,079	1245,01	3,0951729
kleine Pik	647,8756	1285,76	3,1091596
Tyrol	804,1356	1035,908	3,0153210
Venedig	636,9673	1308,077	3,1166331
Wien, u. ganz Oestr.	779,2085	1069,046	3,0289965
Württemberg . .	614,235	1356,174	3,1323155
Würzburg . . .	580,4249	1435,173	3,1569042
Zürch	601,855	1384,07	3,1411582

III. Tabelle.

Das Meilenmaaß.

Namen der Länder und Städte.	1 Meile hält alte Pariser Fuß	1 Meridiangrad hält, od. 15 geogr. Meil. geben	1000 geogr. □ Meilen geben solche □ Meilen
Arabische . . .	6053,5	56,5044	14189,9
Baierische Chaussee-Meilen . . .	22826,6	14,99125	998,834
Böhmische . . .	21270	16,0813	1149,37
Dänische . . .	23197,2	14,74529	966,3267
Deutsche geographische	22803,29	15	1000
Englische neue zu 1760 Yards . . .	4963,23	68,91653	21108,9
Seemeilen . .	5717,13	59,82886	15908,85
Leagues . . .	17150,4	19,9441	1767,855
Französis. alte Leuka	6806,43	50,25386	11224,22
neue Lieues = 1/25 Grad . . .	13681,97	25	2777,754
neue Seemeilen = 1/20 Grad . .	17102,47	20	1777,777
Holländische . . .	18055,12	18,94474	1595,124
Italienische . . .	5717,13	59,82885	15908,82
Jüdische, Sabbatherweg zu 200 bibl. Ellen	3422,4	99,9443	44395,08
Nürnbergische . .	26186,5	13,06205	758,98
Oesterreichische Postmeilen	23355	14,64569	953,3124
Portugiesische . .	19057,44	17,94834	1431,746
Preußische . . .	23873,76	14,32742	575,6434
Römische, alte zu 8 ollymp. Stadien .	4537	75,391	25261,4
Russische Meile oder Werste . . .	3288,2	104,0209	48092,63
Sächsische Polizeymeile	27912	12,25456	667,4412
Schwäbische . .	28587	11,96521	636,294
Schwedische . . .	32953,5	10,37976	478,8416
Schweizerische . .	25795,25	13,261	781,476

Namen der Städte und Länder.	1 Meile hält alte Pariser Fuß	1 Meridiangrad hält, od. 15 geogr. Meil. geben	1000 geogr. □ Meilen geben solche □ Meilen
Spanische . . .	12882	26,5525	3133,92
Türkische, gewöhnliche oder Berri . .	5144,94	66,48268	19644,2
Seemeilen . .	4039,21	84,68224	31871,32
Ungarische . . .	25734,35	13,29155	785,1789

IV. Tabelle.
Getränkmaaße.

Namen der Länder und Städte.	1 solches hat natürliche Decilitres	1000 baier. Maßkannen geben	hievon der Logarithmus.
Ansbach, Maß . . .	13,55777	788,4985	2,8968009
Eimer zu 66 Maß	894,819	11,94686	1,0772539
Augsburg, Eimer zu 60 Maß . . .	641,5585	16,663	1,2217538
Eimer zu 64 Maß	684,319	15,8391	1,1997305
Baden, Großh., Maß = 1/10 Stütze .	15	712,685	2,8528977
Stütze . . .	150	71,2685	1,8528977
Ohm = 10 St.	1500	7,12685	0,8528977
Fuder = 100 St.	15000	0,712685	0,852..—1
Baiern, Maß . .	10,69028	1000	3,0000000
Schenk-Eimer zu 60 Maß . .	641,417	16,66667	1,2218488
Visireimer zu 64 M.	684,178	15,625	1,1938200
Baireuth, Maß .	11,5051	929,178	2,9680990
Bamberg, Stadtmaß	13,49755	792,016	2,8987339
Künische Maß .	14,70876	726,797	2,8614131
Berlin, Quart . .	11,70346	913,429	2,9606747
Bieröhmchen zu 24 Quart . . .	280,8832	38,05953	1,5804634
Weineimer zu 64 Quart . . .	749,022	14,27232	1,1544947
Böhmen, Pinte .	19,11271	559,622	2,7478948
Eimer zu 32 Pinte	611,2870	17,48816	1,2427440

Namen der Länder und Städte.	1 solches hat natürliche Decilitres.	1000 baier. Maßkannen geben	hievon der Logarithmus.
Brabant, Stoop .	37,73822	336,827	2,5274069
Breslau, Quart .	6,942733	1539,78	3,1874587
Dänemark, Pott .	9,660320	1106,62	3,0433908
Eichstädt, Weineimer zu 64 Weinmaß	703,4578	15,19676	1,1817512
Biereimer zu 64 Biermaß . .	769,374	13,89478	1,1428517
England, Pints .	4,734956	2177,736	3,3380053
Gallon zu 8 Pints	37,88751	282,217	2,4505832
Frankfurt am Main Weinmaß . . .	2,45839	4338,49	3,6373386
Frankreich, alte Pinte	9,52146	1122,756	3,0502855
neues Maaß Litre	10	1069,028	3,0289893
Hamburg, Quartier	9,050350	1181,2	3,0723234
Leipzig, Kanne . .	12,94069	887,847	2,9483381
Mannheim, Maß .	17,10412	625,012	2,7958884
Mährische Maß .	10,69752	999,321	2,9987050
Nürnberg, Maß .	10,78544	991,1774	2,9961514
Portugall, Canhado	13,95159	766,241	2,8843654
Almuda zu 12 C.	167,419	63,8534	1,8051840
Tonelado zu 52 Almudo . .	8705,79	1,22872	0,0894529
Regensburg, Köpfel	8,33129	1283,15	3,1082774
Biereimer zu 64	533,2021	20,0499	1,3020974
Bergeimer zu 68	566,5271	18,86985	1,2757685
Weineimer zu 88 K.	733,153	14,58125	1,1637947
Rußland, Osmuschka	15,86909	673,654	2,8284369
Salzburg, 1 Viertl = 2 Kandl = 8 Pfif	15,71151	680,411	2,8327713
Eimer = 40 Viertl	628,4604	17,01027	1,2307113
Schweden, Kanne .	26,18402	408,275	2,6109528
Eimer zu 30 K.	785,5206	13,60917	1,1338316
Schlesien, Quart .	7,018478	1523,16	3,1827455
Spanien, Cantaro Castigl. . . .	157,5009	678,744	2,8317060
Triest, Orne . .	656,5845	16,2813	1,2116891
Tyrol, Maß . .	8,108042	1312,42	3,1180728

Namen der Länder und Städte.	1 solches hält natürliche Decilitres.	1000 baier. Maßkannen geben	hievon der Logarithmus.
Venedig, Bigoncia	1580,563	5,37252	0,7301780
Amphora zu 4 B.	6322,252	1,343128	0,1281141
Wien und ganz Oesterreich Eimer zu 40 Maß	566,0438	18,8859	1,2761392
Württemberg, Maß	18,3704	581,92	2,7648633
Imi zu 10 Maß	183,704	58,192	1,7648633
Eimer zu 16 Imi	2939,264	3,637	0,5607433
Fuder zu 6 Eimer	17635,584	0,606167	-0,2174077
Würzburg, Eimer zu 64 Maß . . .	750,47	14,24586	1,1536887
Zürch, Maß . .	18,24947	585,786	2,7677389

V. Tabelle.

Getreidmaaße.

Namen der Länder und Städte.	1 solches hält natürliche Decilitres.	1000 baier. Metzen geben	hievon der Logarithmus.
Amberg, Metzen .	114,36076	3240,6	3,5106243
Amsterdam, Schcepel	270,2376	1371,375	3,1371562
Sack zu 3 Schc.	810,7130	457,125	2,6600351
Anspach, Korn-Simmer = 16 Metzen = 256 Maß	3380,337	109,6325	2,0399392
Haber-Simmer = 32 Metzen = 576 Maß . .	6241,434	59,3768	1,7736168
Aschaffenb. Maß Korn	174,935	2118,48	3,3260244
Maß Haber . .	218,5467	1694,96	3,2291595
Malter zu 8 M. Korn	1399,48	264,8106	2,4229354
Augsburg, Metzen .	268,0473	1382,578	3,1406898
Schaf zu 8 Metzen	2095,566	172,8223	2,375998
Baden, Großh. Zuber = 100 Sester	15000	24,70642	1,3928098
Malter = 10 Sest.	1500	247,0642	2,3928098
Sester	150	2470,642	3,3928098

Bai-

Namen der Länder und Städte.	1 solches hält natürliche Decilitres.	1000 baier. Metzen geben	hievon der Logarithmus.
Baiern, Metzen .	370,5964	1000	3,0000000
Schäffel .	2223,58	166,6666	2,2218486
Baireuth, Meß . .	322,1429	1150,413	3,0608538
Simra zu 16 M.	5154,286	71,9008	1,8567337
Bamberg, Simmer Korn . . .	712,5845	520,075	2,7160660
Simmer Haber .	965,326	383,909	2,5842283
Berlin, Schäffel = 16 Metzen . .	547,276	677,165	2,8306945
Böhmen, Strich .	936,0224	395,928	2,5976162
Breslau, Metzen .	43,68964	8482,5	3,9285239
Eichstädt, Metzen für alle Sorten .	371,923	996,4085	2,9984374
bey Waitzen u. Korn ein Muth = 2 Schäffel = 32 M.	11901,83	31,13777	1,4932874
bey Gersten u. Dünkel 1 Muth = 38 Metzen . . .	14133,42	26,22127	1,4186538
Habermuth = 46 M.			
Englang, Bushel .	357,2532	1037,347	3,0159240
Last zu 80 B. .	28580,256	12,96686	1,1128350
Frankfurt a. M. Sechter	72,77127	5092,62	3,7069413
Simmer zu 4 S.	291,085	1273,155	3,1048813
Frankreich, alter Boisseau . . .	126,9529	2919,165	3,4652587
Muid = 12 Setiers = 144 Boiss.	18281,21	20,2719	1,3068962
neues Körpermaß, Litre = Mètre cube . . .	10	37059,65	4,5689013
Decalitre = 10 Litres . . .	100	3705'965	3,5689013
Decilitre = 0,1 Litre . . .	1	370596,5	5,5689013
Fulda, Maß . .	220,2196	1682,85	3,2260453
Gallizien, Korschetz	1229,99	301,3014	2,4789997

Namen der Länder und Städte.	1 solches hält natürliche Decilitres.	1000 baier. Metzen geben	hievon der Logarithmus.
Grätzer Viertl, in Steyermark . .	798,7864	463,949	2,6664706
Hamburg, Himmt .	526,8545	703,4036	2,8472046
Faß zu 2 H. .	1053,709	351,699	2,5461746
Hanau, Simmer .	306,8054	1207,92	3,0820382
Heidelberg, Viernsel	278,3381	1331,461	3,1243234
Leipzig, Schäffel .	1066,801	347,3904	2,5408179
Malter zu 8 Sch.	12801,61	28,9492	1,4616367
Mannheim, Simmer = 3 Immer .	152,5417	2429,475	3,3855124
Malter zu 8 Simm.	1220,317	303,6843	2,4824224
Mähren, Metzen .	706,137	524,822	2,7200122
Nürnberg, Metzen .	1994,112	1858,453	3,2691516
Simmer zu 16 M.	3100,58	116,1534	2,0650316
Portugall, Alquiere	135,0357	2743,433	3,4382943
Regensburg, Metzen	187,6144	1975,408	3,2956349
Schaf zu 32 M.	6003,663	311,1877	2,4930224
Salzburg, Metzen .	359,979	1029,471	3,0126241
Spanien, Cahiz Castigl.	571,4863	648,478	2,8118954
Schlesien, Scheffel	763,7622	485,1915	2,6859131
Schweden, Tonne .	1465,115	252,947	2,4030294
Schweinfurt, Metzen Korn . . .	247,921	1494,316	3,1745878
Haber Metzen .	371,851	996,6265	2,9985324
Tyrol, Star . .	305,7754	1211,99	3,0834986
Warschau, Korczek	511,382	724,696	2,8601558
Wien u. ganz Oesterreich Metz. = 8 Achtl	615,035	602,57	2,7800014
Muth = 30 Metzen	18451,12	20,0854	1,3028807
Württemberg, Simmri	221,534	1672,867	3,2234610
Scheffel = 8 Sim.	1772,272	209,1081	2,3203708
Würzburg, Metz. Korn	217,1067	1706,98	3,2322280
Metzen Haber .	335,2705	1105,365	3,0435058
Kornmalter = 8 M.			
Habermalt. = 12 M.			
Zürch, Muth . .	827,1774	448,0253	2651,3026

VI. Tabelle.

Gewicht.

Namen der Länder und Städte.	1 solches hält natürliche Milligr.	1000 baierische Pfund geben	hievon der Logarithmus.
Amsterdam, Pfund Handelsgewicht	493626,8	1133,71	3,0545254
Pf. Troygewicht zu 16 Unzen . .	49200,5	1138,2	3,0562185
Pf. Apothekergew. zu 12 Unzen .	369003,7	1517,6	3,1811573
Münzgew. Mark zu 8 Unzen . .	246002,5	2276,373	3,3572435
Ansbach, Pf. H. Gew.	509302,3	1099,544	3,0412124
Augsburg, Frohn- oder Schwergew.	491043,1	1140,63	3,0571676
Pf. Kramer- oder Leichtgew. .	441050,2	1269,69	3,1037000
Mark Münzgew. zu 8 Unzen . .	236008,7	2372,794	3,3752601
Baden, Großh. 1 Centner = 100 Pf.	50000000	11,2	1,0492180
1 Stein = 10 Pf.	5000000	112	2,0492180
1 Pfund . . .	500000	1120	3,0492180
Baiern, neues Pfund Handelsgew. .	560000	1000	3,0000000
neues Pf. Apoth. G.	360000	1555,56	3,1918855
Bamberg, Pf. H. Gew.	467003,6	1199,41	3,0788677
Baireuth, Pf. H. Gew.	509686,4	1098,715	3,0408850
Berlin und Preußen überh., Pf. H. G.	468102	1195,77	3,0776475
Pf. Apothekergew.	357376,3	1566,98	3,1950623
Mark Münzgew.	233702,4	2396,21	3,3795249
Bern, Apoth. G. von 12 Unzen . .	356655,6	1570,143	3,1959390
Böhmen, Prager Pf. Handelsgewicht .	514347	1088,759	3,0369318
Breslau, Pf. H. Gew.	406165,5	1381,926	3,1404849
Mark Münzgew.	202615,7	2763,853	3,4415149

Namen der Länder und Städte.	1 solches hält natürliche Milligr.	1000 baierische Pfund geben	hievon der Logarithmus.
Brüssel, Pf. H. Gew.			
schweres . . .	492005	1138,2	3,0562185
leichtes . . .	466299	1200,945	3,0795230
Mark Münzgew.	246002,5	2276,4	3,3572485
Cöln, Mark Münzgew.	233870,5	2394,87	3,3792125
Constantinopel, Oka	127565,7	438,99	2,6424540
Cracau, Pf. H. Gew.	404847	1383,226	3,1408970
Mark Münzgew.	198820	28166,18	3,4497280
Dänemark, Pf. H. G.	499548	1121,012	3,0496105
Mark Münzgew.	235768,21	2375,21	3,3757024
Dresden, Pf. H. G.	466828	1199,585	3,0790310
Mark Münzgew.	2334631	2398,676	3,3799716
Eichstädt, Pf. H. G.	509782,5	1098,508	3,0408031
England, Pf. Königsg.	680446,8	822,97	2,9153839
Pf. avoir du poids	453615	1234,527	3,0915005
Pf. Troyeg. zu 12 Unzen . . .	273135,8	1500,79	3,1763211
Frankfurt a. M. Pf. Centn. Gew. .	509062	1100,063	3,0414175
Pf. Handelsgew.	467020	1199,09	3,0788522
Frankreich, alt. Poids de Marc . .	439506,5	1144,01	3,0584296
altes Münzg. Mark	244753,2	2288,23	3,3594996
neues G. Gramme	1000	560000	5,7481880
Kilogramme .	100000	560	2,7481880
Genua, Pf. zu 12 Unz.	317112,6	1765,89	3,2469646
Hamburg, Pf. H. G.	484317,3	1156,267	3,0630580
Hannover, Pf. H. G.	486671,7	1150,675	3,0609519
Leipzig, Pf. H. Gew.	466828	1199,585	3,0790310
Memmingen, Pfund	511328,1	1095,187	3,0394883
Neapel, Pf. M. G. von 12 Unzen .	320331,7	1748,187	3,2425880
Nürnberg, Pf. H. G.	509782,5	1098,507	3,0408031
Mark Münzgew.	238439	2348,6	3,3708092
Portugall, Pf. v. 2 Mark	458948,3	1220,181	3,0864242
Regensburg, Pf. H. G.	567151	987,3915	2,9944893
Pf. Münzgew. .	245906,4	2277,29	3,3574182

Namen der Länder und Städte.	1 solches hält natürliche Milligr.	1000 baierische Pfund geben	hievon der Logarithmus.
Rom, Pf. von 12 Unz.	339214,4	1650,877	3,2177138
Rußland, Pf. H. Gew.	408979	1369,263	3,1364869
Salzburg, Pf. H. G.	560012,8	999,9772	2,9999901
Schlesien, Pf. H. G.	529848	1056,907	3,0240368
Schweden, Pf. Vetualgew. . .	425123	1317,266	3,1196734
Mark Münzgew.	210155	2658,57	3,4246480
Spanien, Pf. H. G.	460293,6	1216,615	3,0851530
Mark Münzgew.	230435,1	2430,84	3,3856393
Turin, Pf. Handelsg.	369003,7	1517,6	3,1811573
Mark Münzgew.	246002,5	2276,4	3,3572485
Tyrol, Pf. H. Gew.	562929	994,8347	2,9977491
Ungarn und Siebenbürgen, Oka .	1275678	4389821	2,6424468
Wien, Pf. H. G. zu 32 Loth . .	560012,8	999,9772	2,9999901
Apoth. G. zu 12 Unz.	420009	1333,304	3,1249291
Mark Münzgew. = 6/5 Cölln. Mark	280646,4	1995,406	3,3000313
Württemberg, Pf. = 2 Mark Cöllnisch = 32 Loth . .	467586,5	1197,64	3,0783261
Würzburg, Pf. H. G.	4769163	1174,21	3,0697458
Zürch, leichtes Pfund von 2 Mark . .	468605,8	1195,034	3,0773803

Anmerk. 1) Wie mittels dieser Tabellen ausländische Maaße oder Gewichte in vaterländische, und umgekehrt, verwandelt werden, ist im II. Theile im §. 96. auf Seite 200 ꝛc. schon gezeigt worden.

2) Sind ausländische Maaße oder Gewichte solcher Länder oder Städte, welche in diesen Tabellen vorkommen, wieder auf ausländische, z. B. 60 württembergische Pfund auf Cölner Mark zu reduciren, so suche man in der VI. Tabelle in Betreff der Gewichte die Stadt Cöln, und dann das Königreich Württemberg; man findet, daß 1000 baier. Pfund 2394,87 Cölner Mark, wie auch daß 1000 baier. Pf. 1197,64 württemberg. Pf. geben, daher sind 1197,64 württemberg. Pfund = 2394,87 Cölner Mark, und umgekehrt 2394,87 Cölner Mark sind = 1197,64 württemberg. Pfund; um deswillen hat man jetzt nachstehende Aufgabe, welche nach der im II. Theile im §. 96. S. 201. bey Nro. 3. aufgestellten Regel aufgelöst wird: „Wie viel Cölner Mark geben 60 württemberg. Pfund, da 1197,64 solche Pfund 2394,87 Cölner Mark geben?

B. System der neuen französischen Maaße, und Gewichte.

a) Längenmaaße.

1) Den neuesten Vermessungen gemäß hält ein Quadrant eines Mittagkreises 30784440, folglich der 100te Theil, oder Centesimalgrad 307844,4 alte französische Pariser Fuß.

2) Als allgemeines Längenmaaß ist der 0,00001 Centesimalgrad angenommen, und heißt Mètre; der Mètre hält daher, oder ist = 3,078444 Pariser Fuß = 443,295936 alt franz. Linien = 3,426309 baier. Fuß.

3) Um größere Längen zu bestimmen, hat man den Myriamètre = 10000 Mètres, den Kilomètre = 1000 Mètres, den Hectomètre = 100 Mètres, und den Décamètre = 10 Mètres.

4) Zu kleinen Längenbestimmungen dient der Décimètre = 1/10 Mètre, der Centimètre = 1/100 Mètre, und der Millimètre = 1/1000 Mètre.

5) Durch einen Beschluß des Ministers des Innern zur Vollziehung des kaiserl. Decrets v. 12. Febr. 1812 wurden für den Kleinhandel und das tägliche Leben noch folgende Abtheilungen und Benennungen erlaubt: Toise = 2 Mètres, Pied = 1/3 Mètre, Doigt = 1/12 Pied, Ligne = 1/12 Doigt, und Aune = 12 Décimètres mit den Abtheilungen in 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, wie auch in 1/3, 1/6 und 1/12.

Anmerk. Die griechischen Vorsylben „Déca, Hecto, Kilo, Myria“ bedeuten die Oberabtheilungen; die latein. „Déci, Centi, Milli“ die Unterabtheilungen jenes Maaßes, bey dem sie stehen. Weil sich dieses Maaß auf die wirkliche Größe unserer Erdkugel gründet, so heißt es das Natürliche.

b) Flächenmaaße.

1) Hundert Quadrat—Mètres geben das allgemeine Flächenmaß, welches Are genannt wird;

2) Zur Messung größerer Flächen hat man das Myriare = 10000 Ares, das Kilare = 1000 Ares, das Hectare = 100 Ares, und das Décare = 10 Ares.

3) Zur Messung kleinerer Flächen bedient man sich des Dèciare = 1/10 Are, und des Centiare = 1/100 Are = 1 Mètre carré.

c) Körpermaaß.

1) Der Kubus eines Mètre = 29,173852 Pariser Kubikfuß ist das neue franz. Holzmaaß, welches Stère genannt wird; 1 Décistère ist = 1/10 Stère, und 1 Centistère ist = 1/100 Stère.

2) Der Kubus vom Décimètre oder 0,001 kub. Mètre bestimmt das Frucht- oder Körpermaaß, welches man Litre heißt.

3) 10 Litres geben, oder sind = 1 Décalitre, 100 Litres = 1 Hectolitre, und 1000 Litres, welche = 1 Mètre cube, geben 1 Kilolitre; ferner 1/10 Litre ist = 1 Décilitre, und 1/100 Litre = 1 Centilitre.

4) Beym Getraidmaaße giebt es noch die erlaubten Maaße und Benennungen: „Double Boisseau = 1/4 Hectolitre, und Boisseau = 1/8 Hectolitre mit den Abtheilungen in 1/2, und 1/4 Boisseau.

Eben so darf bey Körnern 1 Litre in 1/2, 1/4 und 1/8 getheilt werden.

5) Die Flüssigkeitsmaaße sind mit den Getraidmaaßen ganz die nämlichen, während auch bey den Flüssigkeits-Maaßen das Litre in 1/4, 1/8 und 1/16 getheilt werden darf.

d) Gewicht.

1) Das Gewicht eines Kubik-Mètre destillirten Wassers heißt Bar, und das Gewicht eines Kubik-Centimètre von demselben heißt Gramme.

2) Das Gramme, welches als Maaß aller Gewichte angenommen wird, hält genau 10000/4895058 Pariser Pfund, weßhalb dasselbe = 18,82715 Grains des ehemaligen in 9216 Grains getheilten Pariser Pfundes = 1/560 baier. Pf. Handelsgewichts.

3) Bey dem Gewichte kommen folgende Abtheilungen und Benennungen vor:

a) Decagramme = 10 Grammes, Hectogramme = 100 Grammes, Kilogramme = 1000 Grammes, Myriagramme = 10000 Grammes, und Quintal Metrique = 100 Kilogrammes = 100000 Grammes; ferner

b) Décigramme = 1/10 Gramme, Centigramme = 1/100 Gramme, und Milligramme = 1/1000 Gramme.

4) Nebst diesen giebt es noch die erlaubten Gewichte und Benennungen: „Livre = 1/2 Kilogramme = 500 Grammes, Once = 1/16 Livre, Gros = 1/8 Once, und das Grain = 1/72 Gros.

Anmerk. a) Die vor dem kaiserl. Decret vom 12. Febr. 1812 gesetzmäßigen Namen werden noch ferner bey allen öffentlichen und Privaturkunden gebraucht.

b) In Absicht auf die hier angeführten Maaße und Gewichte verschiedener Länder und Städte benützte ich nachstehende Quellen:

1) Das königl. baierische, und königl. württembergische, wie auch das großherzoglich badische Regierungsblatt;

2) Das logarithmisch trigonometrische Handbuch von Vega;

3) Die mathemat. Lehrbücher v. Magold, Lorenz, u. Weigl;

4) Die physikalischen Werke des Hrn. geistl. Rathes, Lycealdirectors, und Professors der Physik D. Joseph Weber.

5) Die Auszüge aus den Acten der königl. Maaß-Regulier-Kommißion zu Stuttgart 1813, welche mir durch meinen Freund den königl. württembergischen Hrn. Ober-Finanz-Rath Jakob Barensteiner gütigst mitgetheilt worden sind;

6) Die mir durch den königl. baier. ersten Stadtgerichts-Assessor zu Memmingen, und Mitglied der kammeralistisch-ökonomischen Societät zu Erlangen, Hrn. D. Bandel überschickten Resultate jener Reductionen, welche Hr. Professor Ulrich Schiegg im Jahre 1803 in Betreff der vormals zu Memmingen üblich gewesenen Maaße und Gewichte vorgenommen hat.

Verzeichniß einiger Druckfehler.

Seite	Zeile	anstatt	lese man
3	viertletzte	$^5/_{10000}$ giebt $^5/_{1000}$	$^1/_{10000}$ giebt $^1/_{1000}$ ꝛc.
38	2	Ausschreiben	Aussprechen
75	12	angezogen	ausgezogen
76	12	Theites	Theiles
78	26	720	729
78	31	der beiden er Theile	der beiden ersten Theile
93	bey IX.	230 fl. 14 kr. somit 13824 Häller	28 fl. 48 kr. somit 13824 Häller
107	23	die Größe — 2a	die Größe — 4a
109	48	8ab — 6d	8ab — 2d
110	14, 15 und 16	$\begin{array}{c} - m \\ - 2m \\ \hline - 3m \end{array}$	$\begin{array}{c} - m \\ - 3m \\ \hline - 4m \end{array}$

110, 111 und 112. S. II. Beyspiel; man lese hierüber die Anmerkung des §. 82. auf Seite 192.

Seite	Zeile	anstatt	lese man
160	12	$\frac{mad}{bcn} = \frac{ma}{bn} : \frac{c}{d}$	$\frac{mbd}{acn} = \frac{mb}{an} : \frac{c}{d}$
172	32	$\overset{2m+1}{= - a}$	$= - a^{2m+1}$
176	22	Rest $= 4a^3 - 16a^2b$ ꝛc.	Rest $= 4a^3 + 16a^2b$ ꝛc.
183	22	auch bey	als auch bey

Anmerkung: 1) In den vorangeschickten Tabellen findet man z. B. 1s2 und 1/2 anstatt $\frac{1}{2}$ oder $^1/_2$.

2) Auf eine ähnliche Weise mußte auch einigemal dieses Zeichen ⋊ anstatt des gewöhnlichen Multiplicationszeichens gebraucht werden.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bundschue, Johann von Gott, 1784-1851

Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauche in den Schulen und zum Selbstunterrichte

Bd.: 3

Kempten 1813

Bibl.Mont. 3651-3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10723356-1